



# Méthode d'éléments finis stabilisée pour les équations de Navier-Stokes incompressibles avec conditions aux limites équivalentes

Frédéric Valentin

## ► To cite this version:

Frédéric Valentin. Méthode d'éléments finis stabilisée pour les équations de Navier-Stokes incompressibles avec conditions aux limites équivalentes. [Rapport de recherche] RR-3480, INRIA. 1998. inria-00073209

**HAL Id: inria-00073209**

**<https://inria.hal.science/inria-00073209>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***Méthode d'Éléments Finis Stabilisée pour les  
Équations de Navier-Stokes Incompressibles avec  
Conditions aux Limites Équivalentes***

Frédéric Valentin

**No 3480**

29 août 1998

\_\_\_\_\_ THÈME 4 \_\_\_\_\_



***apport  
de recherche***



# Méthode d'Éléments Finis Stabilisée pour les Équations de Navier-Stokes Incompressibles avec Conditions aux Limites Équivalentes

Frédéric Valentin \*

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes

Projet M3N

Rapport de recherche n ° 3480 — 29 août 1998 — 61 pages

**Résumé :** Il s'agit d'introduire de nouvelles méthodes d'éléments finis stabilisées pour les équations de Navier-Stokes incompressibles, satisfaisant des conditions aux limites équivalentes (lois de paroi) sur une partie de la frontière du domaine. Des nouveaux termes de stabilisation sur le bord sont introduits et apportent un contrôle dans la semi-norme  $H^1$  du bord, corrigeant les oscillations de la vitesse et de la pression en raison de l'emploi des lois de paroi. Des formulations variationnelles stabilisées sont introduites pour les lois de paroi d'ordre 1 et d'ordre 2, et une analyse d'erreur est établie pour la loi de paroi d'ordre 1. Des essais numériques sont présentées et valident les méthodes.

**Mots-clé :** loi de paroi, Navier-Stokes, domaine rugueux, méthode stabilisée, éléments finis

*(Abstract: pto)*

\* The author was supported by Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq) - Brazil - e-mail: frederic.valentin@inria.fr

# Stabilized Finite Element Method for Incompressible Navier-Stokes Equations with Effective Boundary Conditions

**Abstract:** We introduce new stabilized finite element methods for incompressible Navier-Stokes equations satisfying effective boundary conditions (or wall laws) on a part of the boundary. Some new stabilizing boundary terms are introduced and allow a control in the semi-norm  $H^1$  of the boundary, thus correcting velocity and pressure oscillations caused by the wall laws employed. The stabilized variational formulations are presented for first and second order wall laws, and we prove an error estimate for the first order wall law. Some numerical tests are then presented which validate the methods.

**Key-words:** wall law, Navier-Stokes, rough domain, stabilized method, finite element

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
1.1	Notations . . . . .	8
<b>2</b>	<b>La méthode stabilisée</b>	<b>9</b>
2.1	Application aux équations de Navier-Stokes incompressibles linéarisées	9
2.1.1	M.E.F.S. pour la loi de paroi d'ordre 1 . . . . .	12
2.1.2	M.E.F.S. pour la loi de paroi d'ordre 2 . . . . .	15
2.2	Extension à Navier-Stokes incompressibles . . . . .	17
2.2.1	Loi de paroi d'ordre 1 . . . . .	17
2.2.2	Loi de paroi d'ordre 2 . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Analyse d'erreur</b>	<b>20</b>
3.1	L'erreur avec la loi de paroi d'ordre 1 . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Aspects numériques</b>	<b>32</b>
<b>5</b>	<b>Validations numériques</b>	<b>36</b>
5.1	Marche lisse . . . . .	37
5.2	Marche rugueuse . . . . .	46
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>56</b>

# 1 Introduction

Les méthodes d'éléments finis stabilisées sont apparues il y a plus d'une décennie, leur but étant de pallier les déficiences numériques de la méthode de Galerkin, quand celle-ci est appliquée à certains problèmes de la physique mathématique et de l'ingénierie, non dûs au manque de propriétés de stabilité dans le cas continu (voir [15] pour un résumé intéressant). Les méthodes stabilisées sont une méthodologie systématique pour améliorer la stabilité sans compromettre la consistance. Celles-ci peuvent être résumées de la façon suivante [25] :

Soit le problème de trouver une fonction  $u$  telle que

$$\mathcal{L}u = f \quad (1)$$

dans un domaine ouvert  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  suffisamment régulière, où  $\mathcal{L}$  est un opérateur différentiel et  $f$  une fonction donnée. Si on note par  $H$  un espace de Hilbert, le problème variationnel associé à (1) consiste à trouver  $u \in H$  tel que

$$a(u, v) - (f, v) = 0, \quad \forall v \in H$$

où  $a(., .)$  est une forme bilinéaire continue et coercive sur  $H$ , associée à l'opérateur  $\mathcal{L}$ .

La méthode de Galerkin consiste à définir un sous-espace de dimension finie de  $H$ , noté  $H_h$ , et chercher une fonction  $u_h \in H_h$  telle que

$$a(u_h, v_h) - (f, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in H_h. \quad (2)$$

La méthode stabilisée s'écrit comme : trouver  $u_h \in H_h$  tel que

$$a(u_h, v_h) + \underbrace{\sum_{K \in \mathfrak{T}_h} \int_K (\mathcal{L}u - f) \cdot P(h_K, \mathcal{L}^* v_h)}_{\text{nouveau terme}} - (f, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in H_h, \quad (3)$$

où  $K$  est un élément de la partition  $\mathfrak{T}_h$  du domaine  $\Omega$  et  $h_K$  le diamètre de  $K$ . Il s'agit d'ajouter à (2) un nouveau terme dépendant du maillage, produit interne entre le résidu des équations de Euler-Lagrange et d'une fonction de perturbation  $P(h_K, \mathcal{L}^* v_h)$ , avec  $\mathcal{L}^*$  un opérateur différentiel linéaire.

Dans le cadre des équations de Navier-Stokes incompressibles, l'utilisation de la méthode classique de Galerkin crée deux types d'instabilités numériques : la première est due aux termes de convection, où des oscillations parasites contaminent la vitesse quand l'advection est dominante. On retrouve ce problème quand on résout des écoulements à fort nombre de Reynolds. La deuxième source de problème est due à la formulation mixte associée aux équations de Stokes, limitant le choix de combinaisons des espaces d'éléments finis pour la vitesse et la pression, car on doit respecter la condition de Basbuska-Brezzi (ou condition *inf-sup*) [11], [12] et [13]. Le

non respect de la condition *inf-sup* engendre des instabilités sur la pression, puis sur la vitesse, en raison de l’existence de modes parasites [42]. Les méthodes stabilisées pour les équations de Navier-Stokes incompressibles ont pour objectif de permettre l’utilisation de couples d’espaces pour la vitesse et la pression qui ne satisfont pas à la condition *inf-sup*, tout en introduisant suffisamment de diffusion numérique pour corriger les oscillations, et en préservant toujours la consistance. Si pour le premier problème, l’utilisation des méthodes stabilisées est nécessaire, pour le deuxième, un choix convenable des espaces d’éléments finis serait suffisant pour résoudre convenablement le problème (voir [8], [42] et [58] par exemple). Cependant, la possibilité d’employer les mêmes espaces pour les différentes variables (P1/P1 ou Q2/Q2 par exemple) facilite énormément la mise en oeuvre numérique de la méthode d’éléments finis.

Les méthodes stabilisées pour l’équation advection-diffusion ont été introduites par Brooks and Hughes [20] et appelées SUPG (streamline-upwind-Petrov-Galerkin). Depuis, une large littérature sur le sujet est apparue pour plusieurs types d’équations de transport : la méthode GLS (Galerkin-Least-Squares) pour l’équation d’advection-diffusion (voir [53], [35]) [36] et [32]), GGLS (Gradient-Galerkin-Least-Squares) [41] pour l’équation de la diffusion avec un terme de production, des méthodes combinant d’autres méthodes stabilisées pour traiter l’équation d’advection-diffusion avec un terme de production (voir [47] et [68]) ou alors [32] et [54]. D’importantes améliorations sur la stabilité ont été développées, en choisissant surtout convenablement les paramètres de stabilisation (dépendent de  $h_K$ ) contenus dans la fonction de perturbation  $P$ . Des extensions de ces méthodes ont été appliquées pour la résolution des modèles de turbulence [50], et en particulier du type  $k - \varepsilon$  [69] et [23].

En ce qui concerne les équations de Stokes, les premières études pour surmonter la condition de Babuska-Brezzi ont été proposées par exemple dans [52], [51], [25] et [18]. Par la suite, plusieurs travaux ont été développés, soit en améliorant la stabilité de la méthode (voir par exemple [24] pour des éléments d’ordre élevé), soit en améliorant l’analyse d’erreur (voir par exemple [26] pour l’analyse d’erreur dans les normes usuelles). La suite naturelle a été d’étendre “le savoir-faire” aux équations de Navier-Stokes incompressibles, en utilisant les ingrédients développés pour les équations de Stokes et pour les équations d’advection-diffusion (voir par exemple [65], [45], [35] et [37]).

Depuis quelques années, beaucoup d’efforts ont été consacrés à la compréhension des fondements théoriques et à l’origine des méthodes stabilisées. Deux approches sont apparues qui ont un certain succès :

- a) La première approche consiste à faire le lien entre les méthodes stabilisées et la méthode de Galerkin appliquée à des espaces d’éléments finis enrichis avec des fonctions bulles (bubble fonctions). A la fin des années 80, Pierre [57] et Bank [10] ont remarqué la relation existant entre la formulation variationnelle mixte utilisant le MINI élément [8] pour le problème de Stokes et les méthodes stabilisées utilisant des interpolations linéaires du même ordre pour la pression et la vitesse. Par la suite, plusieurs travaux sont apparus (voir [19] et [9] par exemple), remarquant que la stricte équivalence entre les deux approches



passe par la construction de fonctions bulles, ce qui équivaut à retrouver le paramètre de stabilisation approprié. Maintenant la question est: comment choisir la bulle optimale? (voir [31] pour limitation des fonctions bulles). Récemment, une nouvelle idée a été présentée pour unir définitivement ces deux approches en calculant la fonction bulle optimale. Cette approche a été nommée residual-free bubble ([30], [59], [17], [29],[14], [33], [38], [39], [60] et [16] ). Elle rend possible une base de dérivation pour les méthodes stabilisées avec de bonnes propriétés et des concepts largement acceptés pendant sa construction. L'idée principale est d'attaquer le problème original par la méthode de Galerkin sur des espaces d'éléments finis polynômiaux simples et standards, et d'améliorer l'approximation en corrigeant les déficiences de stabilité, en enrichissant les espaces par des residual-free bubbles (bulles résiduelles). La méthode peut aussi être interprétée comme l'application de la méthode de Galerkin sur des espaces d'éléments finis plus larges, avec des polynômes standards plus les residual-free bubbles. Dans [27] et [28] la stratégie a été mise en oeuvre numériquement et dénommée méthode d'éléments finis à deux niveaux (two-level finite element method). Des résultats numériques convaincants ont été obtenus, et confirment que avec la "bonne bulle", la stabilité est retrouvée. Cependant, l'utilisation d'une méthode stabilisée (au premier niveau) est encore nécessaire pour son application, ce qui provoque un coût de calcul plus important qu'en utilisant une méthode stabilisée classique, à qualité égale.

- b) De façon alternative, une deuxième approche a été introduite récemment par Hughes [49] pour construire des méthodes stabilisées, appelées méthodes variationnelles multiéchelles (variational multiscale method). La philosophie de la méthode est différente de la première. Il s'agit de corriger le fait que la méthode de Galerkin sur de simples espaces d'éléments finis polynômiaux est inadéquate pour résoudre numériquement plusieurs problèmes pratiques, en particulier, quand ceux-ci comportent de fines échelles qui ne sont pas résolues en raison des dimensions des éléments composant le maillage. L'idée principale consiste à supposer que les fines échelles doivent être prises en compte, pour que la solution calculée sur les grandes échelles (taille des éléments du maillage) soit consistante et stable. La procédure de mise en oeuvre de la méthode variationnelle multiéchelle est décomposée en deux étapes: la première est non-numérique et décompose le problème en deux sous-problèmes. Le premier consiste à résoudre les fines échelles en fonction des grandes. Le résultat est introduit dans le deuxième problème, résultant en un problème modifié, souvent dénommé subgrid-scale model (modèle d'échelle de sous-maille), qui contient seulement de grosses échelles. La deuxième et dernière étape consiste simplement à appliquer la méthode de Galerkin pour le problème modifié. Comme les fines échelles ont été retirées, naturellement la solution est stable et consistante. Plusieurs approximations pratiques dans la procédure de la méthode variationnelle multiéchelle sont possibles, permettant son identification à des méthodes stabilisées et en particulier, aux residual-free bubbles (voir figure 1 pour un sommaire de la situation.)

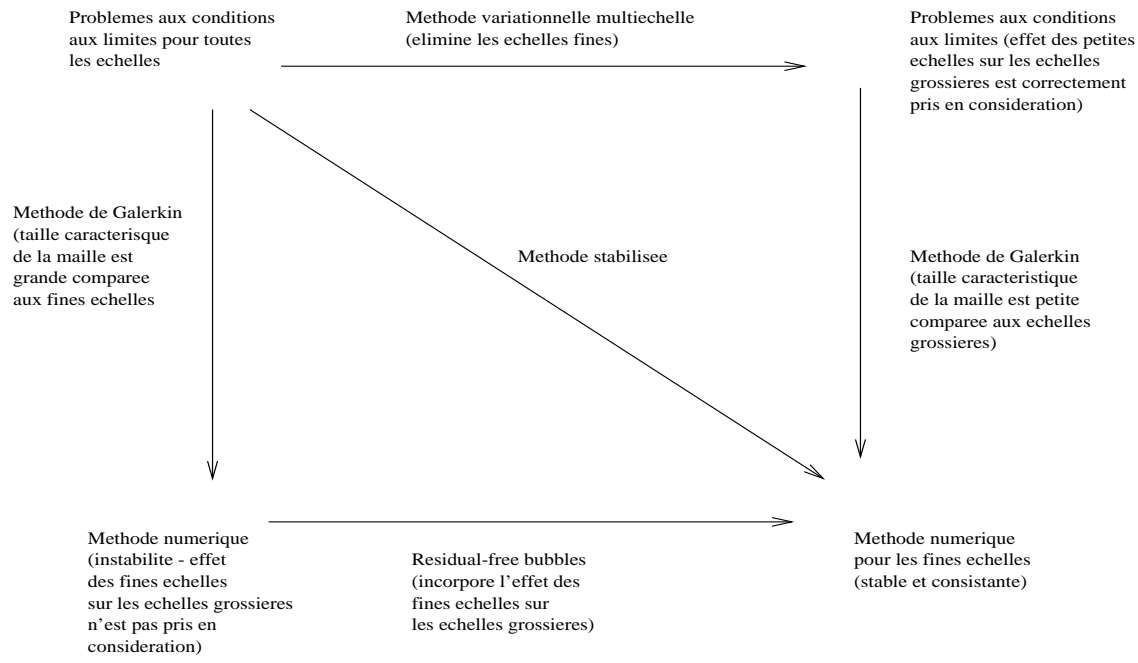


FIG. 1: *L'approximation par residual-free bubble suit le parcours inférieur à gauche et en bas, tandis que la méthode variationnelle multiéchelle suit le parcours supérieur à droite. Les méthodes stabilisées sont interprétées comme des raccourcis, en suivant le parcours diagonal du schéma [14].*

Notre objectif dans ce travail est de développer des méthodes d'éléments finis stabilisées pour les équations de Navier-Stokes incompressibles, satisfaisant aux conditions aux limites équivalentes (lois de paroi) imposées sur une partie du contour du domaine. Pour l'élaboration des méthodes stabilisées, ainsi que des paramètres de stabilisation, on s'est appuyé principalement sur l'analyse d'erreur, sans passer par les deux approches décrites auparavant. La raison est, d'une part, le coût élevé de la mise en oeuvre de l'approche par residual-free bubble, et d'autre part les difficultés théoriques pour étendre la méthode variationnelle multiéchelle aux équations de Navier-Stokes.

Les lois de paroi sont des conditions aux limites équivalentes imposées sur une surface régulière introduite à l'intérieur du domaine, ayant pour objectif de simuler l'influence de la paroi (lisse ou rugueuse) sur l'écoulement. L'intérêt est de retirer du domaine du calcul une partie de la couche limite ainsi que les rugosités, afin de diminuer le coût du calcul. De nouvelles lois de paroi (d'ordre 1 et 2) pour des domaines lisses et rugueux ont été développées et analysées récemment pour les équations de Stokes [2] et Navier-Stokes incompressibles [3] [6], [1], [4] et [5], à partir d'une méthode de décomposition de domaine ou en utilisant des développements asymptotiques à deux échelles. Les lois de paroi d'ordre 1 et 2 sont construites dans le cadre continu et prises en compte de façon faible dans la formulation variationnelle. Leur implémentation dans le cadre discret par l'approche classique de Galerkin s'est heurtée à des instabilités numériques sur le bord (semblables à celles retrouvées dans [41]) en raison d'un manque de contrôle de l'erreur dans la norme  $H^1$  du bord. Le manque de stabilité sur le bord tendant à se propager aussi à l'intérieur du domaine,

l'élaboration d'une méthode stabilisée s'est montrée essentielle. Donc, pour rétablir la stabilité de la solution en préservant sa consistance, une méthode stabilisée est présentée, basée sur la méthode de stabilisation proposée dans Franca et al. [34], mais en ajoutant de nouvelles contributions sur le bord du domaine et en définissant de façon astucieuse les paramètres de stabilisation.

Dans la première section on présente les méthodes stabilisées pour deux différents types de lois de paroi. L'analyse d'erreur des méthodes est faite dans la troisième section pour le problème linéarisé. Une rapide présentation concernant les aspects numériques utilisés est faite dans la quatrième section. La section suivante est consacrée à la validation des méthodes stabilisées sur des problèmes d'intérêt pratique, en montrant la nécessité de leur utilisation. Enfin, les conclusions et les perspectives sont présentées dans la dernière section. Ce travail a fait partie du rapport de recherche INRIA [67].

## 1.1 Notations

Les problèmes considérés dans ce travail sont définis dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  borné,  $N = 2, 3$ , avec  $\Gamma$  sa frontière polygonale ou polyédrale. On choisit une famille de partition  $\mathfrak{T}_h$  régulière de  $\overline{\Omega}$  par des éléments triangulaires (tétraèdre en  $\mathbb{R}^3$ ) ou quadrangulaires (hexaèdres en  $\mathbb{R}^3$ ) construite de façon conforme (l'intersection des éléments de  $\mathfrak{T}_h$  sont, soit une arête (face en  $\mathbb{R}^3$ ), soit un point (arête en  $\mathbb{R}^3$ ), soit vide), de façon à ce que l'union des éléments  $K \in \mathfrak{T}_h$  reproduise  $\overline{\Omega}$ . Par  $\mathfrak{N}_h(\Gamma)$  on note l'ensemble des arêtes de la partition  $\mathfrak{T}_h$  appartenant à la frontière  $\Gamma$  et par  $\mathfrak{S}_h^b(\Gamma)$  l'ensemble des éléments de  $\mathfrak{T}_h$  ayant au moins une arête appartenant à  $\Gamma$ . Différentes combinaisons de triangles et de quadrangles en deux dimensions peuvent être utilisées et la quasiuniformité n'est pas supposée.

De façon classique, on note par  $L^2(\omega)$ ,  $L^\infty(\omega)$  et par  $H^k(\omega)$ ,  $k \geq 1$ , les espaces de Lebesgue et Sobolev munis du produit scalaire  $(\cdot)_{0,\omega}$  et  $(\cdot)_{k,\omega}$  et ses normes associées  $\|\cdot\|_{0,\omega}$ ,  $\|\cdot\|_{\infty,\omega}$  et  $\|\cdot\|_{k,\omega}$  où  $\omega$  est un ouvert de  $\Omega$  ou de la frontière  $\Gamma$  (voir [7]). Par  $L_0^2(\omega)$  on note les fonctions appartenant à  $L^2(\omega)$  de moyenne nulle sur  $\omega$  et par  $H_0^k(\omega)$  les fonctions appartenant à  $H^k(\omega)$  s'annulant sur le bord  $\Gamma$ . Les semi-normes de  $H^k(\omega)$  sont notées par  $|\cdot|_{k,\omega}$  et l'espace de fonctions continues sur  $\Omega$  par  $C^0(\Omega)$ . Pour simplifier, on omettra l'index  $\omega$  quand  $\omega = \Omega$  et l'index 0 quand on fera référence aux normes dans  $L^2$  ou  $L_0^2$ .

Par la suite,  $C, C_k, C_e, C_1, C_2, \dots$  dénotent les diverses constantes indépendantes des propriétés physiques des équations, ainsi que du diamètre de l'élément  $K \in \mathfrak{T}_h$  (noté  $h_K$ ) et du diamètre de l'arête  $E \in \mathfrak{N}_h$  (noté  $h_E$ ). Pour simplifier, on adoptera la notation suivante :

$$R_m(K) = \begin{cases} P_m(K), & \text{si } K \text{ est un triangle ou un tétraèdre,} \\ Q_m(K), & \text{si } K \text{ est un quadrangle ou un hexaèdre,} \end{cases}$$

avec  $m \geq 0$  un entier, où  $P_m(K)$  et  $Q_m(K)$  sont définies de façon usuelle.

## 2 La méthode stabilisée

Dans cette section, il s'agit de présenter une méthode d'éléments finis stabilisée, pour les équations de Navier-Stokes incompressibles avec des conditions aux limites équivalentes développées dans [3], afin de simuler des écoulements incompressibles sur des domaines rugueux. Pour simplifier la présentation, nous fixons le domaine  $\Omega$  ayant comme frontière  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , où nous imposons les conditions aux limites équivalentes sur  $\Gamma_2$  et des conditions de Dirichlet homogènes sur  $\Gamma_1$ . Le domaine  $\overline{\Omega}$  est défini en coordonnées cartésiennes notées  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  et par  $(\mathbf{s}, \mathbf{n})$  on note les vecteurs tangent et normal à  $\Gamma_2$ .

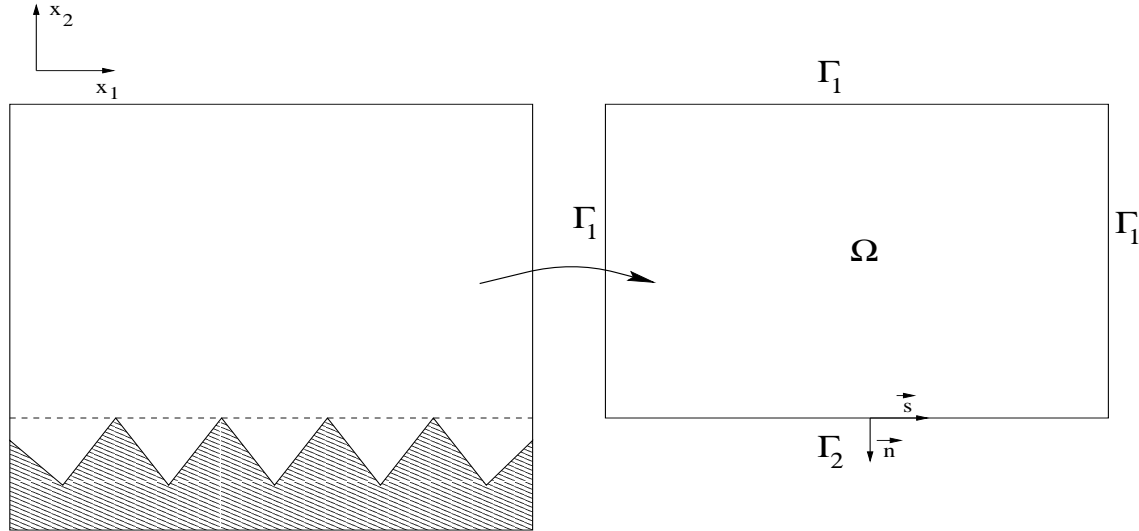


FIG. 2: Le domaine de calcul avec des frontières régulières (à droite) correspond à une partie du domaine réel (à gauche).

### 2.1 Application aux équations de Navier-Stokes incompressibles linéarisées

Les équations de Navier-Stokes incompressibles linéarisées stationnaires sont données par

$$\begin{cases} (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{a} - 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_1, \end{cases} \quad (4)$$

où

- la fonction vectorielle  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u^t(\mathbf{x}), u^n(\mathbf{x}))$  est le champ de vitesse,
- la fonction scalaire  $p(\mathbf{x})$  est la pression statique,
- la fonction vectorielle  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f^t(\mathbf{x}), f^n(\mathbf{x})) \in L^2(\Omega)^N$  est la source donnée,
- la fonction vectorielle  $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = (a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x})) \in H^1(\Omega)^N \cap L^\infty(\Omega)^N$  est un champ de vitesse à divergence nulle donnée,

- la fonction scalaire  $\nu(\mathbf{x})$  est la viscosité du fluide,
- la fonction matricielle  $\varepsilon$  est par définition  $\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ .

**Remarque 1 :**

La condition de Dirichlet homogène sur  $\Gamma_1$  a été choisie par simplicité. Pour une discussion sur les différentes conditions aux limites voir [44] et [42].

Pour simuler l'influence des rugosités sur l'écoulement, nous avons le choix entre deux lois de paroi, différentes par l'ordre avec lequel les effets rugueux seront approchés. Pour une approximation à l'ordre 1, nous imposons sur  $\Gamma_2$  les conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} \alpha u^t + \frac{\partial u^t}{\partial x_2} = 0 & \text{sur } \Gamma_2, \\ u^n = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (5)$$

et pour une approximation à d'ordre deux nous imposons

$$\begin{cases} \alpha u^t + \frac{\partial u^t}{\partial x_2} + \frac{\beta}{\nu} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \gamma \frac{\partial u^t}{\partial x_1} = 0 & \text{sur } \Gamma_2, \\ \theta u^n + \frac{\partial u^n}{\partial x_2} = 0 & \text{sur } \Gamma_2, \end{cases} \quad (6)$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\theta$  sont des constantes positives, simulant l'influence des rugosités sur l'écoulement (voir [3] pour plus de détails).

En utilisant les lois de paroi (5) et (6) nous pouvons écrire de nouvelles conditions aux limites pour (4). En effet, si on note par  $\sigma_{\mathbf{n}} = 2\nu\varepsilon(\mathbf{u})\mathbf{n} - p\mathbf{n}$  le tenseur de cisaillement, la condition aux limites équivalente d'ordre 1 est donnée par

$$\begin{cases} \sigma_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s} = \nu \frac{\partial u^t}{\partial x_2} = -\nu \alpha u^t & \text{sur } \Gamma_2, \\ u^n = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (7)$$

et celle à l'ordre deux par

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{n}} &= \begin{bmatrix} \nu \frac{\partial u^t}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u^n}{\partial x_1} \\ 2\nu \frac{\partial u^n}{\partial x_2} - p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu \alpha u^t - \beta \frac{\partial p}{\partial x_1} - \nu \gamma \frac{\partial u^t}{\partial x_1} - \frac{\nu}{\theta} \frac{\partial^2 u^t}{\partial x_1^2} \\ -2\nu \theta u^n \end{bmatrix} \\ &= -\nu \mathbf{T} \mathbf{u} - \beta \frac{\partial p}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 - \nu \gamma \frac{\partial u^t}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 - \frac{\nu}{\theta} \frac{\partial^2 u^t}{\partial x_1^2} \mathbf{e}_1 \text{ sur } \Gamma_2. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{où } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 2\theta \end{bmatrix}.$$

Par la suite, on utilisera les sous-espaces de  $H^1(\Omega)$  et  $L^2(\Omega)$  définis par

$$V = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{v}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0} \right\},$$

$$V^0 = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{v}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0} \text{ et } v|_{\Gamma_2}^n = 0 \right\}, \quad Q = L_0^2(\Omega)$$

et le sous-espace de  $V^0$ ,

$$V_{div}^0 = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{v}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}, \quad v|_{\Gamma_2}^n = 0 \text{ et } \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \right\}.$$

Le problème (4) avec la loi de paroi d'ordre 1 (7) imposée sur  $\Gamma_2$ , s'écrit sous la forme du problème variationnel suivant : trouver  $(\mathbf{u}, p) \in V^0 \times Q$  tel que

$$\begin{aligned} ((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{a}, \mathbf{v}) + 2\nu (\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v})) - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p) + (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) + \nu \alpha (u^t, v^t)_{\Gamma_2} &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \\ , \forall (\mathbf{v}, q) \in V^0 \times Q. \end{aligned} \quad (9)$$

Alors grâce à la relation

$$((\nabla \mathbf{v}) \mathbf{a}, \mathbf{v}) + 2\nu (\varepsilon(\mathbf{v}), \varepsilon(\mathbf{v})) + \nu \alpha (v^t, v^t)_{\Gamma_2} \geq C \|\mathbf{v}\|_1^2, \quad \forall \mathbf{v} \in V^0,$$

et en appliquant le théorème de Lax-Milgram sur le sous-espace  $V_{div}^0$ , on obtient le résultat suivant :

**Théorème 1** *Le problème (9) admet une solution unique.*

Une fois le cadre continu établi, on s'intéresse maintenant à l'approximation discrète des problèmes. Soient  $V_h \subset V$ ,  $V_h^0 \subset V^0$  et  $Q_h \subset Q$  des espaces de dimensions finies définis par

$$V_h = \left\{ v \in V \mid \mathbf{v}|_K \in R_k(K)^N, \quad K \in \mathfrak{S}_h \right\},$$

$$V_h^0 = \left\{ v \in V^0 \mid \mathbf{v}|_K \in R_k(K)^N, \quad K \in \mathfrak{S}_h \right\}$$

et

$$Q_h = \left\{ v \in Q \cap C^0(\Omega) \mid q|_K \in R_l(K)^N, \quad K \in \mathfrak{S}_h \right\}.$$

Soit  $k \geq 1$  un entier et supposons l'existence de deux opérateurs d'interpolation  $\mathbf{I}_h : V \rightarrow V_h$  et  $J_h : Q \rightarrow Q_h$ , de façon à ce que les estimations pour les approximations de  $\mathbf{u}$  par  $\tilde{\mathbf{u}}_h = \mathbf{I}_h \mathbf{u}$  et de  $p_h$  par  $\tilde{p}_h = J_h p$ , vérifient (voir [22] et [21]) pour  $\forall K \in \mathfrak{T}_h$  et  $\forall E \in \mathfrak{N}_h$  (pour  $0 \leq m \leq 2$ ,  $\max\{m, 1\} \leq l \leq k+1$  et  $0 \leq i \leq 1$ ,  $0 \leq j \leq k$ ):

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{m,K} \leq C_1 h_K^{l-m} \|\mathbf{u}\|_{l,K} \quad \forall \mathbf{u} \in H^l(K), \quad (10)$$

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{0,E} \leq C_2 h_E^{l-1/2} \|\mathbf{u}\|_{l,K_1 \cup K_2} \quad \forall \mathbf{u} \in H^l(K_1 \cup K_2), \quad (11)$$

$$\|p - \tilde{p}_h\|_{i,K} \leq C_3 h_K^{j-i} \|p\|_{j,K} \quad \forall p \in H^j(K). \quad (12)$$

On suppose aussi qu'on a les inégalités inverses

$$C_k \sum_{K \in \mathfrak{T}_h} h_K^2 \|\nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{v})\|_{0,K}^2 \leq \|\varepsilon(\mathbf{v})\|_0^2 \quad \forall \mathbf{v} \in V_h \text{ et } \forall \mathbf{v} \in V_h^0, \quad (13)$$

$$C_e \sum_{E \in \mathfrak{N}_h} h_E^2 \left\| \frac{\partial^2 v^t}{\partial x_2 \partial x_1} \right\|_{0,E}^2 \leq \left\| \frac{\partial v^t}{\partial x_2} \right\|_{0,\Gamma_2}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in V_h \text{ et } \forall \mathbf{v} \in V_h^0. \quad (14)$$

Les méthodes stabilisées dépendent du choix de la condition aux limites équivalente imposée sur  $\Gamma_2$ . Dans les deux prochaines sections, on introduit les méthodes stabilisées pour des lois de paroi d'ordre 1 et d'ordre 2.

### 2.1.1 M.E.F.S. pour la loi de paroi d'ordre 1

On propose la méthode stabilisée suivante :

<p>Trouver <math>(\mathbf{u}_h, q_h) \in V_h^0 \times Q_h</math> tel que</p> $B_1(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{v}_h, q_h) = F(\mathbf{v}_h, q_h), \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in V_h^0 \times Q_h \quad (15)$
--

avec

$$\begin{aligned}
B_1(\mathbf{u}, p, \mathbf{v}, q) &= ((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{a}, \mathbf{v}) + 2\nu (\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v})) - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p) - \\
&(\nabla \cdot \mathbf{u}, q) + \nu \alpha (u^t, v^t)_{\Gamma_2} + (\nabla \cdot \mathbf{u}, \delta \nabla \cdot \mathbf{v}) + \\
&\sum_{K \in \mathfrak{S}_h} ((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{a} - 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) + \nabla p, \\
&\tau(\mathbf{x}, Re_K(\mathbf{x})) ((\nabla \mathbf{v}) \mathbf{a} - 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) - \nabla q))_K + \\
&\sum_{E \in \mathfrak{N}_h} \left( \nu \alpha \frac{\partial u^t}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial^2 u^t}{\partial x_2 \partial x_1}, \tau_e(\mathbf{x}, Pe_E(\mathbf{x})) \left( \nu \alpha \frac{\partial v^t}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial^2 v^t}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \right)_E \quad (16)
\end{aligned}$$

et

$$F(\mathbf{v}, q) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} (\mathbf{f}, \tau(\mathbf{x}, Re_K(\mathbf{x})) ((\nabla \mathbf{v}) \mathbf{a} - 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) - \nabla q))_K \quad (17)$$

où les paramètres de stabilisation sont définis par

$$\delta = \lambda |\mathbf{a}(\mathbf{x})|_p h_K \xi(Re_K(\mathbf{x})), \quad (18)$$

$$\tau = \frac{h_K}{2 |\mathbf{a}(\mathbf{x})|_p} \xi(Re_K(\mathbf{x})), \quad (19)$$

$$\tau_e = \frac{h_E}{8\nu\alpha} \xi(Pe_E(\mathbf{x})), \quad (20)$$

$$Re_K(\mathbf{x}) = \frac{m_k |\mathbf{a}(\mathbf{x})|_p h_K}{4\nu}, \quad (21)$$

$$Pe_E(\mathbf{x}) = \frac{m_e \alpha h_E}{2}, \quad (22)$$

$$\xi(f(\mathbf{x})) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & , \quad 0 \leq f(\mathbf{x}) < 1, \\ 1 & , \quad f(\mathbf{x}) \geq 1, \end{cases} \quad (23)$$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x})|_p = \left( \sum_{i=1}^N |a_i(\mathbf{x})|_p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (24)$$

$$m_k = \min \left\{ \frac{1}{3}, 2C_k \right\}, \quad (25)$$

$$m_e = \min \left\{ \frac{1}{3}, 2C_e \right\} \quad (26)$$

et  $\lambda > 0$ .



### Remarques :

1. La méthode n'est pas limitée par la condition de Babuska-Brezzi, et des interpolations du même ordre peuvent être employées pour la vitesse et la pression. De plus, la méthode est stable pour des interpolations de degré élevé [26] à condition de calculer correctement les valeurs de  $m_k$  et  $m_e$  (voir [46] pour le calcul des constantes inverses).
2. On note que la consistance de la méthode [26] est préservée après l'addition des termes de stabilisation sur le bord. Ce nouveau terme est local, défini élément par élément et permet d'améliorer la stabilité pour la vitesse dans la semi-norme  $H^1$  du bord, puisque la condition aux limites (7) contribue seulement à la stabilité dans  $L^2$  du bord. Le nouveau paramètre de stabilisation  $\tau_e$  est construit de façon à faire la distinction entre un caractère localement convectif ou diffusif associé aux coefficients contenus dans les lois de paroi. La prédominance du terme convectif dans les lois de paroi correspond à une forte influence des rugosités sur l'écoulement ( $\alpha$  grand), soit en raison des dimensions des rugosités, soit si le nombre de Reynolds est important. Dans ce cas, le paramètre  $\tau_e$  est de l'ordre de  $O(h_E)$  et si le terme de diffusion domine,  $\tau_e$  est de l'ordre de  $O(h_E^2)$ .
3. Une alternative pour le paramètre de stabilisation  $\tau$  a été proposée dans [26], quand des éléments finis de degré élevé sont utilisées pour la vitesse :

$$\begin{aligned}
 \delta &= \frac{|\mathbf{a}(\mathbf{x})|_p}{\sqrt{\lambda_K}} \xi(Re_K(\mathbf{x})), \\
 \tau &= \frac{\xi(Re_K(\mathbf{x}))}{\sqrt{\lambda_K} |\mathbf{a}(\mathbf{x})|_p}, \\
 Re_K(\mathbf{x}) &= \frac{|\mathbf{a}(\mathbf{x})|_p}{4\sqrt{\lambda_K}\nu}, \\
 \xi(Re_K(\mathbf{x})) &= \begin{cases} Re_K(\mathbf{x}) & , \quad 0 \leq Re_K(\mathbf{x}) < 1, \\ 1 & , \quad Re_K \geq 1, \end{cases} \\
 |\mathbf{a}(\mathbf{x})|_p &= \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^N |a_i(\mathbf{x})|_p \right)^{1/p} & , \quad 1 \leq p < \infty, \\ \max_{i=1,N} |a_i| & , \quad p = \infty, \end{cases} \\
 \lambda_K &= \max_{0 \neq \mathbf{v} \in (R_k(K)/R)^N} \frac{\|\nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{u})\|_{0,K}^2}{\|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{0,K}^2}, \quad K \in \mathfrak{S}_h,
 \end{aligned}$$

où  $\lambda_K$  est calculé comme étant la plus grande valeur propre d'un problème de valeurs propres généralisé (voir [26] pour détails). L'approche ne fait plus intervenir le diamètre de l'élément  $h_K$ , ni n'utilise les inégalités inverses pour

établir l'analyse d'erreur. Du point de vue pratique, l'intérêt de cette définition est de ne plus avoir à connaître d'estimations *a priori* pour les constantes inverses présentes dans le calcul du paramètre de stabilisation (voir [55] pour des détails sur l'implémentation). Le lien entre les deux formulations est donné par la relation  $\lambda_K^{-1} = C_k h_K^2$ . De façon analogue, la même stratégie peut être adoptée pour le calcul du paramètre de stabilisation sur le bord  $\tau_e$ .

4. Une deuxième formulation est possible pour le problème de Navier-Stokes, et consiste seulement à changer le signe devant le terme de stabilisation  $2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{v})$  dans (16) et (17). Cependant Franca et al. [34] ont remarqué que cette formulation “plus” est instable pour de larges valeurs de  $\tau$ , quand celle-ci est employée avec des interpolations de degré élevé. Dans le cas particulier des équations de Stokes, la formulation (15) se réduit à la méthode proposée dans [24] et pour la formulation “plus” à la méthode GLS proposée dans [48], additionnées du nouveau terme sur le bord. Pour le problème de Stokes, les paramètres de stabilisation se réduisent à

$$\begin{aligned}\delta &= 0, \\ \tau &= \frac{m_k h_K^2}{8\nu},\end{aligned}$$

pour  $\forall K \in \mathfrak{S}_h$ .

5. La prise en compte de la condition de Dirichlet  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_2$  est une difficulté dans la mise en oeuvre de la loi de paroi d'ordre 1, quand la base  $(\mathbf{s}, \mathbf{n})$  ne coïncide pas avec la base canonique. Diverses stratégies sont possibles: prise en compte comme une contrainte dans un cadre Lagrangien [70] et [71], en l'introduisant de façon faible dans une formulation faible “non classique” [56] ou encore en construisant des fonctions de base en coordonnées locales à  $\Gamma_2$ .

### 2.1.2 M.E.F.S. pour la loi de paroi d'ordre 2

L'utilisation de la loi d'ordre deux permet de mieux tenir compte de l'influence des rugosités sur l'écoulement (voir [2] et [3]). La méthode stabilisée est la suivante :

Trouver  $(\mathbf{u}_h, q_h) \in V_h \times Q_h$  tel que

$$B_2(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{v}_h, q_h) = F(\mathbf{v}_h, q_h), \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in V_h \times Q_h \quad (27)$$

avec

$$\begin{aligned}
B_2(\mathbf{u}, p, \mathbf{v}, q) = & ((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{a}, \mathbf{v}) + 2\nu (\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v})) - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p) - (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) + \\
& \frac{\nu}{\theta} \left( \frac{\partial u^t}{\partial x_1}, \frac{\partial v^t}{\partial x_1} \right)_{\Gamma_2} + \nu (\mathbf{T} \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Gamma_2} - \beta \left( p, \frac{\partial v^t}{\partial x_1} \right)_{\Gamma_2} + \nu \gamma \left( \frac{\partial u^t}{\partial x_1}, v^t \right)_{\Gamma_2} + \\
& (\nabla \cdot \mathbf{u}, \delta \nabla \cdot \mathbf{v}) + \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} ((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{a} - 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) + \nabla p, \\
& \tau(\mathbf{x}, Re_K(\mathbf{x})) ((\nabla \mathbf{v}) \mathbf{a} - 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) - \nabla q))_K + \\
& \sum_{E \in \mathfrak{S}_h} \left( \nu \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_2 \partial x_1} + \beta \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} \mathbf{e}_1 + \nu \gamma \frac{\partial^2 u^t}{\partial x_1^2} \mathbf{e}_1, \right. \\
& \left. \tau_e(\mathbf{x}, Pe_K(\mathbf{x})) \left( \nu \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_2 \partial x_1} - \beta \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} \mathbf{e}_1 + \nu \gamma \frac{\partial^2 v^t}{\partial x_1^2} \mathbf{e}_1 \right) \right)_E \quad (28)
\end{aligned}$$

et

$$F(\mathbf{v}, q) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} (\mathbf{f}, \tau(\mathbf{x}, Re_K(\mathbf{x})) ((\nabla \mathbf{v}) \mathbf{a} - 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) - \nabla q))_K \quad (29)$$

où le paramètre de stabilisation sur le bord  $\tau_e$  est redéfini comme

$$\begin{aligned}
\tau_e &= \frac{h_E}{8\nu |\mathbf{T}|^2} \xi(Pe_E(\mathbf{x})), \quad (30) \\
Pe_E(\mathbf{x}) &= \frac{m_e h_E |\mathbf{T}|^2}{2(1 + \gamma)}, \quad (31)
\end{aligned}$$

où la fonction  $\xi$  et la constante  $m_e$  sont définies comme précédemment.

### Remarques :

1. La stabilisation sur le bord est faite maintenant pour les deux composantes de la vitesse, avec le même principe que pour la loi de paroi d'ordre 1 (différente en fonction du caractère convectif ou diffusif au niveau élémentaire). La formulation variationnelle est modifiée pour préserver la consistance sur le bord, et une nouvelle définition du paramètre de stabilisation  $\tau_e$  est introduite pour permettre la stabilisation de la composante de la vitesse normale. Ce nouveau paramètre a les mêmes caractéristiques que celui défini antérieurement.
2. L'absence de conditions du type Dirichlet dans la loi de paroi d'ordre 2 est particulièrement intéressante pour traiter des géométries complexes, en évitant les difficultés rencontrées dans la prise en compte de la loi de paroi d'ordre 1. Maintenant, les deux conditions aux limites sur le bord sont prises de façon faible dans la formulation variationnelle.

## 2.2 Extension à Navier-Stokes incompressibles

Dans cette section, il s'agit d'étendre les formulations variationnelles stabilisées des sections précédentes, aux équations de Navier-Stokes incompressibles suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} - 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_{11} \times (0, T), \\ 2\nu \varepsilon(\mathbf{u}) \mathbf{n} - p \mathbf{n} = \mathbf{h} & \text{sur } \Gamma_{12} \times (0, T), \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 & \text{dans } \Omega \text{ en } t = 0. \end{array} \right. \quad (32)$$

Sur la frontière  $\Gamma_2$ , on impose, soit la loi de paroi d'ordre un (7), soit la loi de paroi d'ordre deux non-linéaire (voir [4] pour plus de détails)

$$\sigma_{\mathbf{n}} = \left[ \begin{array}{l} -\nu (\alpha + \phi u^t) u^t - \beta \frac{\partial p}{\partial x_1} - \nu \gamma \frac{\partial u^t}{\partial x_1} - \frac{\nu}{\theta} \frac{\partial^2 u^t}{\partial x_1^2} \\ -2\nu \theta u^n \end{array} \right] \text{ sur } \Gamma_2,$$

où  $\phi$  est une constante négative donnée, telle que  $\alpha + \phi u^t(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_2$ .

Les frontières  $\Gamma_{11}$  et  $\Gamma_{12}$  sont des sous-ensembles de  $\Gamma_1$  tels que  $\Gamma_1 = \Gamma_{11} \cup \Gamma_{12}$ , sur lesquelles des conditions de Dirichlet et Neumann non-homogènes sont respectivement imposées. Les fonctions  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{h}$  et  $\mathbf{u}_0$  sont supposées "suffisamment régulières", pour que (32) ait une branche de solution. Pour l'existence et l'unicité d'une branche de solutions singulières pour le problème (32) voir [63], [64] ou [42] par exemple (dans le cas où  $\Gamma_2 = \emptyset$ ).

Pour approcher le problème (32) avec les lois de paroi (7) et (8), on introduit les espaces d'approximations suivants :

$$V_h^d = \left\{ \mathbf{v}(\cdot, t) \in V, t \in (0, T) \mid \mathbf{v}|_K \in R_k(K)^N, K \in \mathfrak{T}_h, \mathbf{v}(\cdot, t)|_{\Gamma_{11}} = \mathbf{g} \right\} \text{ et}$$

$$V_h^{d0} = \left\{ \mathbf{v}(\cdot, t) \in V_h^d \mid v^t(\cdot, t)|_{\Gamma_2} = 0 \right\}.$$

Par la suite, on présente les formulations stabilisées en fonction du type de loi de paroi.

### 2.2.1 Loi de paroi d'ordre 1

La méthode stabilisée appliquée à (32) satisfaisant (8) sur  $\Gamma_2$  s'écrit comme :

<p>Trouver <math>(\mathbf{u}_h, q_h) \in V_h^{d0} \times Q_h</math> tel que</p> $B_1(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{v}_h, q_h) = F(\mathbf{v}_h, q_h), \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in V_h^{d0} \times Q_h \quad (33)$
--

avec

$$\begin{aligned}
B_1(\mathbf{u}, p, \mathbf{v}, q) &= \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + 2\nu (\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v})) - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p) - (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) + \\
&\quad \nu \alpha (u^t, v^t)_{\Gamma_2} + (\nabla \cdot \mathbf{u}, \delta \nabla \cdot \mathbf{v}) + \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} - 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) + \nabla p, \right. \\
&\quad \left. \tau(\mathbf{x}, Re_K(\mathbf{x})) ((\nabla \mathbf{v}) \mathbf{u} - 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) - \nabla q) \right)_K + \\
&\quad \sum_{E \in \mathfrak{N}_h} \left( \nu \alpha \frac{\partial u^t}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial^2 u^t}{\partial x_2 \partial x_1}, \tau_e(\mathbf{x}, Pe_E(\mathbf{x})) \left( \nu \alpha \frac{\partial v^t}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial^2 v^t}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \right)_E \quad (34)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{v}, q) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (\mathbf{h}, \mathbf{v})_{\Gamma_{12}} + \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} (\mathbf{f}, \tau(\mathbf{x}, Re_K(\mathbf{x})) ((\nabla \mathbf{v}) \mathbf{u} - \\
&\quad 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) - \nabla q))_K \quad (35)
\end{aligned}$$

où les paramètres de stabilisation sont définis par

$$\begin{aligned}
\delta &= \lambda |\mathbf{u}(\mathbf{x})|_p h_K \xi(Re_K(\mathbf{x})), \\
\tau &= \frac{h_K}{2 |\mathbf{u}(\mathbf{x})|_p} \xi(Re_K(\mathbf{x})), \\
\tau_e &= \frac{h_E}{8\nu\alpha} \xi(Pe_E(\mathbf{x})), \\
Re_K(\mathbf{x}) &= \frac{m_k |\mathbf{u}(\mathbf{x})|_p h_K}{4\nu}, \\
Pe_E(\mathbf{x}) &= \frac{m_e \alpha h_E}{2}, \\
\xi(f(\mathbf{x})) &= \begin{cases} f(\mathbf{x}) & , \quad 0 \leq f(\mathbf{x}) < 1, \\ 1 & , \quad f(\mathbf{x}) \geq 1, \end{cases} \\
|\mathbf{u}(\mathbf{x})|_p &= \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^N |u_i(\mathbf{x})|_p \right)^{1/p} & , \quad 1 \leq p < \infty, \\ \max |u_i| & , \quad p = \infty, \end{cases} \\
m_k &= \min \left\{ \frac{1}{3}, 2C_k \right\}, \\
m_e &= \min \left\{ \frac{1}{3}, 2C_e \right\} \quad (36)
\end{aligned}$$

et  $\lambda > 0$ .

### 2.2.2 Loi de paroi d'ordre 2

L'extension de la méthode stabilisée à Navier-Stokes incompressibles satisfaisant la condition aux limites (8) sur  $\Gamma_2$  s'écrit :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\mathbf{u}_h, q_h) \in V_h^d \times Q_h \text{ tel que} \\ &B_2(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{v}_h, q_h) = F(\mathbf{v}_h, q_h), \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in V_h^{d0} \times Q_h \end{aligned} \quad (37)$$

avec

$$\begin{aligned} B_2(\mathbf{u}, p, \mathbf{v}, q) = & \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + 2\nu (\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v})) - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p) - (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) + \\ & \nu (\mathbf{T} \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Gamma_2} + \nu \phi \left( (u^t)^2, v^t \right)_{\Gamma_2} - \beta \left( p, \frac{\partial v^t}{\partial x_1} \right)_{\Gamma_2} + \nu \gamma \left( \frac{\partial u^t}{\partial x_1}, v^t \right)_{\Gamma_2} + \\ & \frac{\nu}{\theta} \left( \frac{\partial u^t}{\partial x_1}, \frac{\partial v^t}{\partial x_1} \right)_{\Gamma_2} + (\nabla \cdot \mathbf{u}, \delta \nabla \cdot \mathbf{v}) + \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} - 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) + \nabla p, \right. \\ & \left. \tau(\mathbf{x}, Re_K(\mathbf{x})) ((\nabla \mathbf{v}) \mathbf{u} - 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) - \nabla q) \right)_K + \\ & \sum_{E \in \mathfrak{S}_h} \left( \nu \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + 2\nu \phi u^t \frac{\partial u^t}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 - \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_2 \partial x_1} + \beta \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} \mathbf{e}_1 + \nu \gamma \frac{\partial^2 u^t}{\partial x_1^2} \mathbf{e}_1, \right. \\ & \left. \tau_e(\mathbf{x}, Pe_E(\mathbf{x})) \left( \nu \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} + 2\nu \phi u^t \frac{\partial v^t}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 - \nu \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_2 \partial x_1} - \beta \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} \mathbf{e}_1 + \nu \gamma \frac{\partial^2 v^t}{\partial x_1^2} \mathbf{e}_1 \right) \right)_E \end{aligned} \quad (38)$$

et

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}, q) = & (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (\mathbf{h}, \mathbf{v})_{\Gamma_{12}} + \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} (\mathbf{f}, \tau(\mathbf{x}, Re_K(\mathbf{x})) ((\nabla \mathbf{v}) \mathbf{u} - \\ & 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) - \nabla q))_K \end{aligned} \quad (39)$$

avec la définition de  $\tau$  précédente et les paramètres de stabilisation sur le bord donnés par

$$\begin{aligned} \tau_e(\mathbf{x}) &= \frac{h_E}{2\nu \left( |\mathbf{T}|^2 + 2\phi |u^t(\mathbf{x})|_p \right)} \xi(Pe_E(\mathbf{x})), \\ Pe_E &= \frac{m_e \left( |\mathbf{T}|^2 + 2\phi |u^t(\mathbf{x})|_p \right) h_E}{2(1 + \gamma)} \end{aligned} \quad (40)$$

où la fonction  $\xi$  et la constante  $m_e$  sont définies comme précédemment.

#### Remarque 2:

Dans la prochaine section, il s'agira d'étudier la convergence de la méthode stabilisée appliquée aux équations de Navier-Stokes incompressibles linéarisées avec la loi de paroi d'ordre 1. Des analyses d'erreur pour le cas non-linéaire ont été faites

dans [45] pour la méthode SUPG et plus récemment par Tobiska et al. [66] pour les méthodes stabilisées en général, pour des conditions aux limites du type Dirichlet sur la frontière. Cependant, on remarque que toutes les difficultés numériques rencontrées pour la résolution de Navier-Stokes incompressibles sont présentes dans le modèle linéarisé : les problèmes d'advection dominante, l'incompatibilité des espaces d'éléments finis et le manque de contrôle sur les dérivées de la vitesse sur le bord. Cela sera confirmé numériquement dans la section 5.

### 3 Analyse d'erreur

Dans cette section, on s'intéresse à l'analyse d'erreur de la méthode d'éléments finis stabilisée introduite précédemment pour la loi de paroi d'ordre 1. Le résultat de convergence est établi de façon classique, en montrant d'abord la stabilité de l'opérateur et en obtenant des estimations sur l'erreur d'interpolation, en fonction du caractère diffusif ou convectif du problème, pour ensuite utiliser la consistance de la méthode pour établir l'erreur de l'approche. La stratégie pour les démonstrations est basée principalement sur les travaux de [24] et [34] (voir [66] et [40] pour une deuxième stratégie).

On remarque d'abord que le paramètre de stabilisation  $\tau$  est borné dans chaque élément  $K \in \mathfrak{S}_h$ . En effet, par définition

$$\tau(\mathbf{x}, Re_K(\mathbf{x})) = \begin{cases} \frac{h_K}{2|\mathbf{a}|_p} & Re_K(\mathbf{x}) \geq 1, \\ \frac{m_k h_K^2}{8\nu} & 0 \leq Re_K(\mathbf{x}) < 1, \end{cases}$$

alors comme pour  $Re_K(\mathbf{x}) \geq 1$

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{x}, Re_K(\mathbf{x})) &= \frac{h_K}{2|\mathbf{a}|_p} \frac{1}{Re_K(\mathbf{x})} \frac{m_k |\mathbf{a}|_p h_K}{4\nu} \\ &\leq \frac{m_k h_K^2}{8\nu} \end{aligned}$$

on a

$$\tau(\mathbf{x}, Re_K(\mathbf{x})) \leq \frac{m_k h_K^2}{8\nu} \quad (41)$$

pour tout  $Re_K$ . De plus, on note que comme  $m_k \leq 2C_k$ , on a  $\frac{m_k}{4C_k} \leq \frac{1}{2}$ .

Par la suite, on notera la norme dépendante du maillage sur les espaces discrets  $V_h^0 \times Q_h$  par

$$\|(\mathbf{u}, p)\|_h = \left( \|(\mathbf{u}, p)\|_d^2 + \|\mathbf{u}\|_b^2 \right)^{1/2} \quad (42)$$

où

$$\|(\mathbf{u}, p)\|_d = \left( \frac{1}{2} \left( 2\nu \|\varepsilon(\mathbf{u})\|_0^2 + \|\tau^{1/2}((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{a} + \nabla p)\|_0^2 \right) + \|\delta^{1/2} \nabla \cdot \mathbf{u}\|_0^2 \right)^{1/2} \quad (43)$$

et la norme  $\|\cdot\|_b$ , représentant la contribution des termes des bords sera définie dans le prochain paragraphe.

### 3.1 L'erreur avec la loi de paroi d'ordre 1

On propose de définir la norme  $\|\cdot\|_b$  par

$$\|\mathbf{u}\|_b = \left( \nu \alpha \|u^t\|_0^2 + \sum_{E \in \mathbb{N}_h} \left\| \tau_e^{1/2} \left( \nu \alpha \frac{\partial u^t}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial^2 u^t}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \right\|_{0,E}^2 \right)^{1/2}, \quad (44)$$

sur l'espace discret  $V_h^0$ . On notera par  $\|\cdot\|_{b,E}$  la restriction de (44) à l'arête  $E$ . Donc, par les définitions (42)-(44), nous avons le résultat de stabilité suivant :

#### **Lemme 1**

*On suppose la fonction  $\mathbf{a} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  et la constante  $\alpha$  donnée, telles que*

- i)  $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$  dans  $\Omega$ ,*
- ii)  $\nu(\mathbf{x}) = \nu = \text{constante}$  dans  $\Omega$ ,*
- iii)  $\alpha > 0$ ,*
- iv)  $a_2(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_2$ .*

*Alors,  $\forall (\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h^0 \times Q_h$*

$$B_1(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{u}_h, -p_h) \geq \|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_h^2. \quad (45)$$

Démonstration :

On remarque d'abord qu'en effectuant une intégration par partie

$$((\nabla \mathbf{v}_h) \mathbf{a}, \mathbf{v}_h) = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h^0, \quad (46)$$



par la contrainte d'incompressibilité ( $i$ ), par ( $iv$ ) et par la condition de Dirichlet homogène sur  $\Gamma_1$ . De plus, par l'inégalité inverse (13), on a l'estimation

$$\begin{aligned}
\sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \left\| 2\nu \tau^{1/2} \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{u}_h) \right\|_{0,K}^2 &\leq \frac{2\nu m_k}{4} \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} h_K^2 \left\| \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{u}_h) \right\|_{0,K}^2 \\
&\leq \frac{2\nu m_k}{4C_k} \left\| \varepsilon(\mathbf{u}_h) \right\|_0^2 \\
&\leq \frac{2\nu}{2} \left\| \varepsilon(\mathbf{u}_h) \right\|_0^2.
\end{aligned} \tag{47}$$

Donc, par la définition de la forme bilinéaire  $B_1$ , par (46) et (47), on a

$$\begin{aligned}
&B_1(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{u}_h, -p_h) \\
&= 2\nu \left\| \varepsilon(\mathbf{u}_h) \right\|_0^2 + \left\| \tau^{1/2} ((\nabla \mathbf{u}_h) \mathbf{a} + \nabla p_h) \right\|_0^2 + \left\| \delta^{1/2} \nabla \cdot \mathbf{u}_h \right\|_0^2 + \\
&\quad \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \left\| 2\nu \tau^{1/2} \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{u}_h) \right\|_{0,K}^2 + \left\| \mathbf{u}_h \right\|_b^2 - \\
&\quad 2 \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} (2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{u}_h), \tau ((\nabla \mathbf{u}_h) \mathbf{a} + \nabla p_h))_K \\
&\geq 2\nu \left\| \varepsilon(\mathbf{u}_h) \right\|_0^2 + (1 - \delta_1^{-1}) \left\| \tau^{1/2} ((\nabla \mathbf{u}_h) \mathbf{a} + \nabla p_h) \right\|_0^2 + \\
&\quad (1 - \delta_1) \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} 2\nu \left\| \tau^{1/2} \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{u}_h) \right\|_{0,K}^2 + \left\| \delta^{1/2} \nabla \cdot \mathbf{u}_h \right\|_0^2 + \left\| \mathbf{u}_h \right\|_b^2 \\
&\geq \left( 1 - \frac{1 - \delta_1}{2} \right) 2\nu \left\| \varepsilon(\mathbf{u}_h) \right\|_0^2 + (1 - \delta_1^{-1}) \left\| \tau^{1/2} ((\nabla \mathbf{u}_h) \mathbf{a} + \nabla p_h) \right\|_0^2 + \\
&\quad \left\| \delta^{1/2} \nabla \cdot \mathbf{u}_h \right\|_0^2 + \left\| \mathbf{u}_h \right\|_b^2
\end{aligned}$$

et en choisissant  $\delta_1 = 2$ , on a

$$\begin{aligned}
B_1(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{u}_h, -p_h) &\geq \frac{1}{2} \left( 2\nu \left\| \varepsilon(\mathbf{u}_h) \right\|_0^2 + \left\| \tau^{1/2} ((\nabla \mathbf{u}_h) \mathbf{a} + \nabla p_h) \right\|_0^2 \right) + \\
&\quad \left\| \delta^{1/2} \nabla \cdot \mathbf{u}_h \right\|_0^2 + \left\| \mathbf{u}_h \right\|_b^2.
\end{aligned}$$

□

On s'intéresse maintenant à établir des estimations pour l'erreur d'interpolation, en fonction de la dominance de la diffusion ou de la convection dans le problème de

Navier-Stokes avec la loi de paroi d'ordre 1. En utilisant les estimations (10)-(12) on a le résultat suivant :

## Lemme 2

*On suppose que la solution de (9) possède la régularité suivante:*

$$i) \quad \mathbf{u} \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega/\Gamma_2),$$

$$ii) \quad p \in H^{l+1}(\Omega) \cap L_0^2(\Omega).$$

*Alors si on note*

$$\begin{aligned} & \|(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}, \tilde{p}_h - p)\|_{d,K}^2 \\ &= \left\| \tau^{-1/2} (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \right\|_{0,K}^2 + 2\nu \left\| \varepsilon (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \right\|_{0,K}^2 + \left\| 2\nu \tau^{1/2} \nabla \cdot \varepsilon (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \right\|_{0,K}^2 + \\ & \quad \left\| \tau^{1/2} \nabla (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \mathbf{a} \right\|_{0,K}^2 + \left\| \delta^{1/2} \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \right\|_{0,K}^2 + \left\| \delta^{-1/2} (\tilde{p}_h - p) \right\|_{0,K}^2 + \\ & \quad \left\| \tau^{1/2} \nabla (\tilde{p}_h - p) \right\|_{0,K}^2, \end{aligned}$$

sur chaque élément  $K \in \mathfrak{S}_h$  on a

a) Si  $Re_K(\mathbf{x}) \geq 1, \forall \mathbf{x} \in K$ , alors

$$\begin{aligned} & \|(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}, \tilde{p}_h - p)\|_{d,K}^2 \\ & \leq C \left( \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p h_K^{2k+1} \|\mathbf{u}\|_{k+1,K}^2 + \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p^{-1} h_K^{2l+1} \|p\|_{l+1,K}^2 \right) \end{aligned}$$

a1) Si  $Pe_E(\mathbf{x}) \geq 1, \forall \mathbf{x} \in K, K \in \mathfrak{S}_h^b(\Gamma_2)$ , alors

$$\begin{aligned} & \|\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}\|_{b,E}^2 \\ & \leq C \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p \alpha h_K h_E^{2k} \|\mathbf{u}\|_{k+1,K}^2 \end{aligned}$$

a2) Si  $0 \leq Pe_E(\mathbf{x}) < 1, \forall \mathbf{x} \in K, K \in \mathfrak{S}_h^b(\Gamma_2)$ , alors

$$\begin{aligned} & \|\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}\|_{b,E}^2 \\ & \leq C \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p h_K h_E^{2k-1} \|\mathbf{u}\|_{k+1,K}^2 \end{aligned}$$

b) Si  $0 \leq Re_K(\mathbf{x}) < 1, \forall \mathbf{x} \in K$ , alors

$$\begin{aligned} & \|(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}, \tilde{p}_h - p)\|_{d,K}^2 \\ & \leq C \left( 2\nu h_K^{2k} \|\mathbf{u}\|_{k+1,K}^2 + (2\nu)^{-1} h_K^{2l+2} \|p\|_{l+1,K}^2 \right) \end{aligned}$$

b1) Si  $Pe_E(\mathbf{x}) \geq 1, \forall \mathbf{x} \in K, K \in \mathfrak{S}_h^b(\Gamma_2)$ , alors

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}\|_{b,E}^2 \\
& \leq C 2\nu \alpha h_E^{2k} \|\mathbf{u}\|_{k+1,K}^2 \\
b2) \quad & \text{Si } 0 \leq Pe_E(\mathbf{x}) < 1, \forall \mathbf{x} \in K, K \in \mathfrak{S}_h^b(\Gamma_2), \text{ alors} \\
& \|\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}\|_{b,E}^2 \\
& \leq C 2\nu h_E^{2k-1} \|\mathbf{u}\|_{k+1,K}^2
\end{aligned}$$

Donc, on a le résultat suivant,

$$\begin{aligned}
& \left\| \tau^{-1/2} (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \right\|_0^2 + 2\nu \left\| \varepsilon (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \right\|_0^2 + \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \left\| 2\nu \tau^{1/2} \nabla \cdot \varepsilon (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \right\|_{0,K}^2 + \\
& \left\| \tau^{1/2} \nabla (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \mathbf{a} \right\|_0^2 + \left\| \delta^{1/2} \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \right\|_0^2 + \left\| \delta^{-1/2} (\tilde{p}_h - p) \right\|_0^2 + \\
& \left\| \tau^{1/2} \nabla (\tilde{p}_h - p) \right\|_0^2 + \|\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}\|_b^2 \\
& \leq C \left( \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} h_K^{2k} \|\mathbf{u}\|_{k+1,K}^2 \left( Y(Re_K - 1) h_K \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p + Y(1 - Re_K) 2\nu \right) + \right. \\
& \quad \left. \sum_{K \in \mathfrak{S}_h^b(\Gamma_2)} h_E^{2k-1} \|\mathbf{u}\|_{k+1,K}^2 \left( Y(Re_K - 1) h_K \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p + Y(1 - Re_K) 2\nu \right) \right. \\
& \quad \left. (Y(Pe_E - 1) \alpha h_E + Y(1 - Pe_E)) + \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} h_K^{2l} \|p\|_{l+1,K}^2 \left( Y(Re_K - 1) h_K \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p^{-1} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. Y(1 - Re_K) h_K^2 (2\nu)^{-1} \right) \right), \\
& \text{où } Y(\cdot) \text{ est la fonction de Heaviside}
\end{aligned}$$

$$Y(x - y) = \begin{cases} 0, & x < y, \\ 1, & x \geq y. \end{cases} \quad (48)$$

Démonstration:

a) Si  $Re_K(\mathbf{x}) \geq 1, \forall \mathbf{x} \in K$  alors

$$\begin{aligned}
& \left\| \tau^{-1/2} (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \right\|_{0,K}^2 \leq 2h_K^{-1} \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p \|\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}\|_{0,K}^2 \\
& \cdot \\
& \leq C \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p h_K^{2k+1} \|\mathbf{u}\|_{k+1,K}^2, \\
& 2\nu \left\| \varepsilon (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \right\|_{0,K}^2 \leq \frac{m_k |\mathbf{a}|_p h_K}{2Re_K} \|\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}\|_{1,K}^2 \\
& \cdot \\
& \leq C \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p h_K^{2k+1} \|\mathbf{u}\|_{k+1,K}^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \tau^{1/2} \nabla (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \mathbf{a} \right\|_{0,K}^2 = \left\| \frac{\sqrt{h_K}}{\sqrt{2} |\mathbf{a}|_p^{1/2}} \nabla (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \mathbf{a} \right\|_{0,K}^2 \\
& \leq \frac{h_K}{2} \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p \|\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}\|_{1,K}^2 \leq C h_K^{2k+1} \sup_{x \in K} |\mathbf{a}|_p \|\mathbf{u}\|_{k+1,K}^2, \\
& \left\| \tau^{1/2} 2\nu \nabla \cdot \varepsilon (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \right\|_{0,K}^2 \leq \frac{m_k^2 h_K^3 \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p}{8Re_K} \|\nabla \cdot \varepsilon (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u})\|_{0,K}^2 \\
& \leq C \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p h_K^{2k+1} \|\mathbf{u}\|_{k+1,K}^2, \\
& \left\| \delta^{1/2} \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \right\|_{0,K}^2 \leq \left\| \sqrt{\lambda} |\mathbf{a}|_p^{1/2} h_K^{1/2} (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \right\|_{1,K}^2 \\
& \leq C \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p h_K^{2k+1} \|\mathbf{u}\|_{k+1,K}^2, \\
& \left\| \delta^{-1/2} (\tilde{p}_h - p) \right\|_{0,K}^2 = \left\| \left( \lambda |\mathbf{a}|_p h_K \right)^{-1/2} (\tilde{p}_h - p) \right\|_{0,K}^2 \\
& \leq \left( \lambda \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p h_K \right)^{-1} \|\tilde{p}_h - p\|_{0,K}^2 \\
& \leq C \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p^{-1} h_K^{2l+1} \|p\|_{l+1,K}^2, \\
& \left\| \tau^{1/2} \nabla (\tilde{p}_h - p) \right\|_{0,K}^2 = \left\| \frac{\sqrt{h_K}}{\sqrt{2} |\mathbf{a}|_p^{1/2}} \nabla (\tilde{p}_h - p) \right\|_{0,K}^2 \\
& \leq \frac{h_K}{2} \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p^{-1} \|\nabla (\tilde{p}_h - p)\|_{0,K}^2 \leq \\
& C \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p^{-1} h_K^{2l+1} \|p\|_{l+1,K}^2,
\end{aligned}$$

a1) Si  $Pe_K(\mathbf{x}) \geq 1, \forall \mathbf{x} \in K, K \in \mathfrak{S}_h^b(\Gamma_2)$ , alors

$$\begin{aligned}
& \nu \alpha \|\tilde{u}_h^t - u^t\|_{0,E}^2 \leq \frac{m_k |\mathbf{a}|_p h_K}{4Re_K} \alpha \|\tilde{u}^t - u^t\|_{0,E}^2 \\
& \leq C \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p \alpha h_K h_E^{2k+1} \|\mathbf{u}\|_{k+1,K}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \tau_e^{1/2} \left( \nu \alpha \frac{\partial (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial^2 (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \right\|_{0,E}^2 \\
& \leq \left\| \sqrt{\frac{h_E \nu \alpha}{8}} \frac{\partial (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_1} \right\|_{0,E}^2 + \left\| \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{h_E \nu \alpha}{8}} \frac{\partial^2 (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_2 \partial x_1} \right\|_{0,E}^2 \\
& \leq \frac{h_E \alpha m_k \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p h_K}{16 Re_K} \left\| \frac{\partial (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_1} \right\|_{0,E}^2 + \frac{h_E^3 \alpha m_e^2 h_K m_k \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p}{32 Re_K Pe_K^2} \left\| \frac{\partial^2 (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_2 \partial x_1} \right\|_{0,E}^2 \\
& \leq C \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p \alpha h_K h_E^{2k} \|\mathbf{u}\|_{k+1,K}^2.
\end{aligned}$$

a2) Si  $0 \leq Pe_E(\mathbf{x}) < 1$ ,  $\forall \mathbf{x} \in K$ ,  $K \in \mathfrak{S}_h^b(\Gamma_2)$ , alors

$$\begin{aligned}
& \nu \alpha \|\tilde{u}_h^t - u^t\|_{0,E}^2 \leq \frac{m_k |\mathbf{a}|_p h_K}{4 Re_K} \frac{2 Pe_E}{m_e h_E} \|\tilde{u}_h^t - u^t\|_{0,E}^2 \\
& \leq C \left( \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p h_K h_E^{2k-1} \|\mathbf{u}\|_{k+1,K}^2 \right), \\
& \left\| \tau_e^{1/2} \left( \nu \alpha \frac{\partial (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial^2 (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \right\|_{0,E}^2 \\
& \leq \left\| \frac{h_E \sqrt{m_e \alpha} \sqrt{\nu}}{4} \frac{\partial (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_1} \right\|_{0,E}^2 + \left\| \frac{h_E \sqrt{m_e \nu}}{16} \frac{\partial^2 (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_2 \partial x_1} \right\|_{0,E}^2 \\
& \leq \left\| \frac{Pe_E \sqrt{\nu}}{4 m_e} \frac{\partial (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_1} \right\|_{0,E}^2 + \left\| \frac{h_E \sqrt{m_e \nu}}{16} \frac{\partial^2 (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_2 \partial x_1} \right\|_{0,E}^2 \\
& \leq \frac{Pe_E^2 m_k \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p h_K}{16 m_e Re_K} \left\| \frac{\partial (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_1} \right\|_{0,E}^2 + \frac{h_E^2 m_e m_k \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p h_K}{32 Re_K} \left\| \frac{\partial^2 (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_2 \partial x_1} \right\|_{0,E}^2 \\
& \leq C \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p h_K h_E^{2k-1} \|\mathbf{u}\|_{k+1,K}^2.
\end{aligned}$$

b) Si  $0 \leq Re_K(\mathbf{x}) < 1$ ,  $\forall \mathbf{x} \in K$  alors

$$\begin{aligned}
& \left\| \tau^{-1/2} (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \right\|_{0,K}^2 \leq \frac{8\nu}{h_K^2 m_k} \|\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}\|_{0,K}^2 \\
& \leq C \nu h_K^{2k} \|\mathbf{u}\|_{k+1,K}^2, \\
& 2\nu \|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u})\|_{0,K}^2 \leq C 2\nu h_K^{2k} \|\mathbf{u}\|_{k+1,K}^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \tau^{1/2} \nabla (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \mathbf{a} \right\|_{0,K}^2 = \left\| \sqrt{\frac{h_K^2 m_k}{8\nu}} \nabla (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \mathbf{a} \right\|_{0,K}^2 \\
& \leq 2\nu Re_K \left\| \tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u} \right\|_{1,K}^2 \\
& \leq C 2\nu h_K^{2k} \left\| \mathbf{u} \right\|_{k+1,K}^2, \\
& \left\| \tau^{1/2} 2\nu \nabla \cdot \varepsilon (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \right\|_{0,K}^2 \leq \left\| \sqrt{\frac{h_K^2 m_k \nu}{2}} \nabla \cdot \varepsilon (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \right\|_{0,K}^2 \\
& \leq C 2\nu h_K^{2k+2} \left\| \mathbf{u} \right\|_{k+1,K}^2, \\
& \left\| \delta^{1/2} \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \right\|_{0,K}^2 \\
& \leq \left\| \sqrt{\frac{\lambda 4\nu Re_K^2}{m_k}} (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \right\|_{1,K}^2 \leq \frac{4\lambda\nu}{m_k} \left\| (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \right\|_{1,K}^2 \leq \\
& \leq C 2\nu h_K^{2k} \left\| \mathbf{u} \right\|_{k+1,K}^2, \\
& \left\| \delta^{-1/2} (\tilde{p}_h - p) \right\|_{0,K}^2 = \left\| \sqrt{\frac{m_k}{4\nu \lambda Re_K^2}} (\tilde{p}_h - p) \right\|_{0,K}^2 \\
& \leq C (2\nu)^{-1} h_K^{2l+2} \left\| p \right\|_{l+1,K}^2, \\
& \left\| \tau^{1/2} \nabla (\tilde{p}_h - p) \right\|_{0,K}^2 \leq \left\| \sqrt{\frac{h_K^2 m_k}{8\nu}} \nabla (\tilde{p}_h - p) \right\|_{0,K}^2 \\
& \leq C (2\nu)^{-1} h_K^{2k+2} \left\| p \right\|_{l+1,K}^2,
\end{aligned}$$

b1) Si  $Pe_E(\mathbf{x}) \geq 1, \forall \mathbf{x} \in K, K \in \mathfrak{S}_h^b(\Gamma_2)$ , alors

$$\begin{aligned}
& \nu \alpha \left\| \tilde{u}_h^t - u^t \right\|_{0,E}^2 \leq C 2\nu \alpha h_E^{2k+2} \left\| \mathbf{u} \right\|_{k+1,K}^2, \\
& \left\| \tau_e^{1/2} \left( \nu \alpha \frac{\partial (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial^2 (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \right\|_{0,E}^2 \\
& \leq \left\| \frac{\sqrt{h_E \nu \alpha}}{\sqrt{8}} \frac{\partial (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_1} \right\|_{0,E}^2 + \left\| \frac{1}{\alpha} \frac{\sqrt{\alpha h_E \nu}}{\sqrt{8}} \frac{\partial^2 (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_2 \partial x_1} \right\|_{0,E}^2 \\
& \leq \frac{h_E 2\nu \alpha}{32} \left\| \frac{\partial (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_1} \right\|_{0,E}^2 + \frac{m_e^2 h_E^3 \alpha 2\nu}{64 P e_E^2} \left\| \frac{\partial^2 (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_2 \partial x_1} \right\|_{0,E}^2 \\
& \leq C 2\nu \alpha h_E^{2k} \left\| \mathbf{u} \right\|_{k+1,K}^2.
\end{aligned}$$

b2) Si  $0 \leq Pe_E(\mathbf{x}) < 1, \forall \mathbf{x} \in K, K \in \mathfrak{S}_h^b(\Gamma_2)$ , alors

$$\nu \alpha \left\| \tilde{u}_h^t - u^t \right\|_{0,E}^2 \leq \nu \frac{2Pe_E}{m_e h_E} \left\| \tilde{u}_h^t - u^t \right\|_{0,E}^2 \leq C 2\nu h_E^{2k} \left\| \mathbf{u} \right\|_{k+1,K}^2$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \tau_e^{1/2} \left( \nu \alpha \frac{\partial (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial^2 (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \right\|_{0,E}^2 \\
& \leq \left\| \frac{h_E \sqrt{m_e} \alpha \sqrt{\nu}}{4} \frac{\partial (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_1} \right\|_{0,E}^2 + \left\| \sqrt{\frac{h_E^2 m_e \nu}{16}} \frac{\partial^2 (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_2 \partial x_1} \right\|_{0,E}^2 \\
& \leq \frac{P e_E 2\nu}{16 m_e} \left\| \frac{\partial (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_1} \right\|_{0,E}^2 + \frac{h_E^2 m_e 2\nu}{32} \left\| \frac{\partial^2 (\tilde{u}_h^t - u^t)}{\partial x_2 \partial x_1} \right\|_{0,E}^2 \\
& \leq C 2\nu h_E^{2k-1} \|\mathbf{u}\|_{k+1,K}^2
\end{aligned}$$

Par l'addition des différentes estimations et en utilisant l'inégalité triangulaire, le résultat suit.

□

On est prêt à présenter le théorème de convergence.

### **Théorème 2**

*On suppose les hypothèses des Lemmes (1) et (2). Donc, si  $(\mathbf{u}_h, p_h)$  est la solution approchée du problème (15) et  $(\mathbf{u}, p)$  la solution exacte de (9), alors on a l'estimation pour l'erreur suivante :*

$$\begin{aligned}
& \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|_h^2 \\
& \leq C \left( \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} h_K^{2k} \|\mathbf{u}\|_{k+1,K}^2 \left( Y (Re_K - 1) h_K \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p + Y (1 - Re_K) 2\nu \right) + \right. \\
& \quad \left. \sum_{K \in \mathfrak{S}_h^b(\Gamma_2)} h_E^{2k-1} \|\mathbf{u}\|_{k+1,K}^2 \left( Y (Re_K - 1) h_K \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p + Y (1 - Re_K) 2\nu \right) \right. \\
& \quad \left. (Y (Pe_E - 1) \alpha h_E + Y (1 - Pe_E)) + \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} h_K^{2l} \|p\|_{l+1,K}^2 \left( Y (Re_K - 1) h_K \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p^{-1} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. Y (1 - Re_K) h_K^2 (2\nu)^{-1} \right) \right),
\end{aligned}$$

où  $Y(\cdot)$  est donnée par (48).

Démonstration:

Soient  $\mathbf{e}^{\mathbf{u}} = \{e^{u^t}, e^{u^n}\} = \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}} + \mathbf{e}_i^{\mathbf{u}}$ , avec  $\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}} = \{e_h^{u^t}, e_h^{u^n}\} = \mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h$ ,  $\mathbf{e}_i^{\mathbf{u}} = \{e_i^{u^t}, e_i^{u^n}\} = \tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}$  et  $e^p = e_h^p + e_i^p$ , avec  $e_h^p = p_h - \tilde{p}_h$ ,  $e_i^p = \tilde{p}_h - p$ . Donc par le Lemme 2 et par la consistance de la formulation stabilisée (15), on obtient

$$\begin{aligned}
& \|(\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}, e_h^p)\|_h^2 \\
& \leq B_1((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}, e_h^p), (\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}, -e_h^p)) \\
& = B_1((\mathbf{e}^{\mathbf{u}} - \mathbf{e}_i^{\mathbf{u}}, e^p - e_i^p), (\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}, -e_h^p)) \\
& = -B_1((\mathbf{e}_i^{\mathbf{u}}, e_i^p), (\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}, -e_h^p)) \\
& = -[(\nabla \mathbf{e}_i^{\mathbf{u}}) \mathbf{a}, \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}] + 2\nu (\varepsilon(\mathbf{e}_i^{\mathbf{u}}), \varepsilon(\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})) - (e_i^p, \nabla \cdot \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) + (\nabla \cdot \mathbf{e}_i^{\mathbf{u}}, e_h^p) + (\nabla \cdot \mathbf{e}_i^{\mathbf{u}}, \delta \nabla \cdot \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) + \\
& \quad \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} ((\nabla \mathbf{e}_i^{\mathbf{u}}) \mathbf{a} - 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{e}_i^{\mathbf{u}}) + \nabla e_i^p, \tau((\nabla \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) \mathbf{a} - 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) + \nabla e_h^p))_{0,K} + \\
& \quad \left[ \sum_{E \in \mathfrak{N}_h} \left( \nu \alpha \frac{\partial e_i^{u^t}}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial^2 e_i^{u^t}}{\partial x_2 \partial x_1}, \tau_e \left( \nu \alpha \frac{\partial e_h^{u^t}}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial^2 e_h^{u^t}}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \right)_{0,E} \right] \\
& \leq (\mathbf{e}_i^{\mathbf{u}}, (\nabla \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) \mathbf{a} + \nabla e_h^p) + \frac{1}{2\lambda_1} 2\nu \|\varepsilon(\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})\|_0^2 + \frac{\lambda_1}{2} 2\nu \|\varepsilon(\mathbf{e}_i^{\mathbf{u}})\|_0^2 + (e_i^p, \nabla \cdot \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) - \\
& \quad (\nabla \cdot \mathbf{e}_i^{\mathbf{u}}, \delta \nabla \cdot \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) + \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \left( \|\tau^{1/2}((\nabla \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) \mathbf{a} + \nabla e_h^p)\|_{0,K} + \|\tau^{1/2} 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})\|_{0,K} \right) \times \\
& \quad \|\tau^{1/2}((\nabla \mathbf{e}_i^{\mathbf{u}}) \mathbf{a} - 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{e}_i^{\mathbf{u}}) + \nabla e_i^p)\|_{0,K} + \\
& \quad \sum_{E \in \mathfrak{N}_h} \frac{1}{2\lambda_2} \left\| \tau_e^{1/2} \left( \nu \alpha \frac{\partial e_i^{u^t}}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial^2 e_i^{u^t}}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \right\|_{0,E}^2 + \frac{\lambda_2}{2} \sum_{E \in \mathfrak{N}_h} \left\| \tau_e^{1/2} \left( \nu \alpha \frac{\partial e_h^{u^t}}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial^2 e_h^{u^t}}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \right\|_{0,E}^2 \\
& \leq \frac{1}{2\lambda_3} \|\tau^{1/2}((\nabla \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) \mathbf{a} + \nabla e_h^p)\|_0^2 + \frac{\lambda_3}{2} \|\tau^{-1/2} \mathbf{e}_i^{\mathbf{u}}\|_0^2 + \frac{1}{2\lambda_1} 2\nu \|\varepsilon(\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})\|_0^2 + \frac{\lambda_1}{2} 2\nu \|\varepsilon(\mathbf{e}_i^{\mathbf{u}})\|_0^2 + \\
& \quad (e_i^p, \nabla \cdot \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) + \frac{1}{2\lambda_4} \|\delta^{1/2} \nabla \cdot \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\|_0^2 + \frac{\lambda_4}{2} \|\delta^{1/2} \nabla \cdot \mathbf{e}_i^{\mathbf{u}}\|_0^2 + \frac{1}{2\lambda_3} \|\tau^{1/2}((\nabla \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}) \mathbf{a} + \nabla e_h^p)\|_0^2 + \\
& \quad \lambda_3 \|\tau^{1/2}(\nabla \mathbf{e}_i^{\mathbf{u}}) \mathbf{a}\|_0^2 + 2\lambda_3 \|\tau^{1/2} \nabla e_i^p\|_0^2 + 2\lambda_3 \sum_{E \in \mathfrak{N}_h} \|\tau^{1/2} 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{e}_i^{\mathbf{u}})\|_{0,K}^2 + \\
& \quad \frac{1}{2\lambda_1} \sum_{E \in \mathfrak{N}_h} \|\tau^{1/2} 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})\|_{0,K}^2 + \lambda_1 \|\tau^{1/2}(\nabla \mathbf{e}_i^{\mathbf{u}}) \mathbf{a}\|_0^2 + 2\lambda_1 \|\tau^{1/2} \nabla e_i^p\|_0^2 + \\
& \quad 2\lambda_1 \sum_{E \in \mathfrak{N}_h} \|\tau^{1/2} 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{e}_i^{\mathbf{u}})\|_{0,K}^2 + \sum_{E \in \mathfrak{N}_h} \frac{1}{2\lambda_2} \left\| \tau_e^{1/2} \left( \nu \alpha \frac{\partial e_i^{u^t}}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial^2 e_i^{u^t}}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \right\|_{0,E}^2 + \\
& \quad \frac{\lambda_2}{2} \sum_{E \in \mathfrak{N}_h} \left\| \tau_e^{1/2} \left( \nu \alpha \frac{\partial e_h^{u^t}}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial^2 e_h^{u^t}}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \right\|_{0,E}^2
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\leq \frac{3}{4\lambda_1} 2\nu \|\varepsilon(\mathbf{e}_h^u)\|_0^2 + \frac{1}{\lambda_3} \|\tau^{1/2}((\nabla \mathbf{e}_h^u) \mathbf{a} + \nabla e_h^p)\|_0^2 + \frac{1}{2\lambda_4} \|\delta^{1/2} \nabla \cdot \mathbf{e}_h^u\|_0^2 + (e_i^p, \nabla \cdot \mathbf{e}_h^u) + \\
&\quad \frac{\lambda_3}{2} \|\tau^{-1/2} \mathbf{e}_i^u\|_0^2 + \frac{\lambda_1}{2} 2\nu \|\varepsilon(\mathbf{e}_i^u)\|_0^2 + (\lambda_1 + \lambda_3) \|\tau^{1/2}(\nabla \mathbf{e}_i^u) \mathbf{a}\|_0^2 + 2(\lambda_1 + \lambda_3) \|\tau^{1/2} \nabla e_i^p\|_0^2 + \\
&\quad 2(\lambda_1 + \lambda_3) \sum_{E \in \mathfrak{N}_h} \|\tau^{1/2} 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{e}_i^u)\|_{0,K}^2 + \frac{\lambda_4}{2} \|\delta^{1/2} \nabla \cdot \mathbf{e}_i^u\|_0^2 + \\
&\quad \sum_{E \in \mathfrak{N}_h} \frac{1}{2\lambda_2} \left\| \tau_e^{1/2} \left( \nu \alpha \frac{\partial e_i^{u^t}}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial^2 e_i^{u^t}}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \right\|_{0,E}^2 + \frac{\lambda_2}{2} \sum_{E \in \mathfrak{N}_h} \left\| \tau_e^{1/2} \left( \nu \alpha \frac{\partial e_h^{u^t}}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial^2 e_h^{u^t}}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \right\|_{0,E}^2
\end{aligned}$$

On remarque d'abord que

$$\begin{aligned}
&(e_i^p, \nabla \cdot \mathbf{e}_h^u) \\
&\leq \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \left[ \frac{\lambda_4}{2} Y(Re_K - 1) \|\delta^{-1/2} e_i^p\|_{0,K}^2 + \frac{1}{2\lambda_4} Y(Re_K - 1) \|\delta^{1/2} \nabla \cdot \mathbf{e}_h^u\|_{0,K}^2 + \right. \\
&\quad \left. \frac{\lambda_1}{2} Y(1 - Re_K) (2\nu)^{-1} \|e_i^p\|_{0,K}^2 + \frac{1}{2\lambda_1} Y(1 - Re_K) 2\nu \|\nabla \cdot \mathbf{e}_h^u\|_{0,K}^2 \right] \\
&\leq \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \left[ \frac{1}{2\lambda_4} Y(Re_K - 1) \|\delta^{1/2} \nabla \cdot \mathbf{e}_h^u\|_{0,K}^2 + \frac{N}{2\lambda_1} Y(1 - Re_K) 2\nu \|\varepsilon(\mathbf{e}_h^u)\|_{0,K}^2 + \right. \\
&\quad \left. \frac{\lambda_4}{2} Y(Re_K - 1) \|\delta^{-1/2} e_i^p\|_{0,K}^2 + \frac{\lambda_1}{2} Y(1 - Re_K) (2\nu)^{-1} \|e_i^p\|_{0,K}^2 \right]. \quad (49)
\end{aligned}$$

En choisissant  $\lambda_1 = 3 + 2NY(1 - Re_K)$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 4$ ,  $\lambda_4 = 1 + Y(Re_K - 1)$ , en introduisant l'estimation (49) dans l'inégalité précédente et en utilisant le Lemme 2, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \|(\mathbf{e}_h^u, e_h^p)\|_h^2 \\
&\leq 2 \|\tau^{-1/2} \mathbf{e}_i^u\|_0^2 + \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \left[ \frac{1}{2} (3 + 2NY(1 - Re_K)) 2\nu \|\varepsilon(\mathbf{e}_i^u)\|_{0,K}^2 + \right. \\
&\quad (7 + 2NY(1 - Re_K)) \|\tau^{1/2}(\nabla \mathbf{e}_i^u) \mathbf{a}\|_{0,K}^2 + \frac{1}{2} (1 + Y(Re_K - 1)) \|\delta^{1/2} \nabla \cdot \mathbf{e}_i^u\|_{0,K}^2 + \\
&\quad 2(7 + 2NY(1 - Re_K)) \|\tau^{1/2} 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{e}_i^u)\|_{0,K}^2 + Y(Re_K - 1) \|\delta^{-1/2} e_i^p\|_{0,K}^2 + \\
&\quad \left. \frac{1}{2} (3 + 2N)Y(1 - Re_K) (2\nu)^{-1} \|e_i^p\|_{0,K}^2 + 2(7 + 2NY(1 - Re_K)) \|\tau^{1/2} \nabla e_i^p\|_0^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{E \in \mathfrak{N}_h} \frac{1}{2} \left\| \tau_e^{1/2} \left( \nu \alpha \frac{\partial e_i^{u^t}}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial^2 e_i^{u^t}}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \right\|_{0,E}^2 \\
& \leq C \left( \left\| \tau^{-1/2} \mathbf{e}_i^u \right\|_0^2 + 2\nu \left\| \varepsilon(\mathbf{e}_i^u) \right\|_0^2 + \left\| \tau^{1/2} (\nabla \mathbf{e}_i^u) \mathbf{a} \right\|_0^2 + \left\| \delta^{1/2} \nabla \cdot \mathbf{e}_i^u \right\|_0^2 + \right. \\
& \quad \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \left[ \left\| \tau^{1/2} 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(\mathbf{e}_i^u) \right\|_{0,K}^2 + Y(Re_K - 1) \left\| \delta^{-1/2} e_i^p \right\|_{0,K}^2 + \right. \\
& \quad \left. Y(1 - Re_K)(2\nu)^{-1} \left\| e_i^p \right\|_{0,K}^2 \right] + \left\| \tau^{1/2} \nabla e_i^p \right\|_0^2 + \\
& \quad \sum_{E \in \mathfrak{N}_h} \left\| \tau_e^{1/2} \left( \nu \alpha \frac{\partial e_i^{u^t}}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial^2 e_i^{u^t}}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \right\|_{0,E}^2 \Bigg) \\
& \leq C \left( \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} h_K^{2k} |\mathbf{u}|_{k+1,K}^2 \left( Y(Re_K - 1) h_K \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p + Y(1 - Re_K) 2\nu \right) + \right. \\
& \quad \sum_{K \in \mathfrak{S}_h^b(\Gamma_2)} h_E^{2k-1} |\mathbf{u}|_{k+1,K}^2 \left( Y(Re_K - 1) h_K \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p + Y(1 - Re_K) 2\nu \right) \\
& \quad (Y(Re_E - 1) \alpha h_E + Y(1 - Re_E)) + \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} h_K^{2l} |p|_{l+1,K}^2 \left( Y(Re_K - 1) h_K \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p^{-1} + \right. \\
& \quad \left. Y(1 - Re_K) h_K^2 (2\nu)^{-1} \right) \Bigg).
\end{aligned}$$

De plus, par le Lemme 2, on a aussi

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\| (\mathbf{e}_i^u, e_i^p) \right\|_h^2 \\
& \leq C \left( \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} h_K^{2k} |\mathbf{u}|_{k+1,K}^2 \left( Y(Re_K - 1) h_K \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p + Y(1 - Re_K) 2\nu \right) + \right. \\
& \quad \sum_{K \in \mathfrak{S}_h^b(\Gamma_2)} h_E^{2k-1} |\mathbf{u}|_{k+1,K}^2 \left( Y(Re_K - 1) h_K \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p + Y(1 - Re_K) 2\nu \right) \\
& \quad (Y(Re_E - 1) \alpha h_E + Y(1 - Re_E)) + \\
& \quad \left. \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} h_K^{2l} |p|_{l+1,K}^2 \left( Y(Re_K - 1) h_K \sup_{\mathbf{x} \in K} |\mathbf{a}|_p^{-1} + Y(1 - Re_K) h_K^2 (2\nu)^{-1} \right) \right),
\end{aligned}$$

et le résultat suit par l'inégalité triangulaire, en redéfinissant les constantes.

□

## 4 Aspects numériques

Le premier pas pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes avec des conditions aux limites équivalentes, consiste à représenter  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $\mathbf{v}$  et  $q$  en terme de bases d'éléments finis, pour ensuite les introduire dans les formulations variationnelles. Une fois cela fait, on obtient le système d'équations non-linéaires suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{u}) + \mathbf{N}_\tau^\mathbf{v}(\mathbf{u}) + [\mathbf{K} + \mathbf{K}_\tau^\mathbf{v} + \mathbf{K}_\delta^\mathbf{v} + \mathbf{B} + \mathbf{B}_{\tau_e}^\mathbf{v}] \mathbf{u} + \\ [\mathbf{G} + \mathbf{G}_\tau^\mathbf{v}] \mathbf{p} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_\tau \end{aligned} \quad (50)$$

$$\mathbf{N}_\tau^q(\mathbf{u}) + [\mathbf{G}^T + \mathbf{K}_\tau^q] \mathbf{u} + [\mathbf{G}_\tau^q] \mathbf{p} = \mathbf{E}_\tau \quad (51)$$

en employant la loi de paroi d'ordre 1. En choisissant d'imposer la loi de paroi d'ordre 2, nous avons :

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}) + \mathbf{N}_\tau^\mathbf{v}(\mathbf{u}) + \mathbf{B}^\phi(\mathbf{u}) + \quad (52)$$

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}_\tau^\mathbf{v} + \mathbf{K}_\delta^\mathbf{v} + \mathbf{B} + \mathbf{B}^\theta + \mathbf{B}^\gamma + \mathbf{B}_{\tau_e}^\mathbf{v}] \mathbf{u} + [\mathbf{G} + \mathbf{G}_\tau^\mathbf{v} + \mathbf{C} + \mathbf{C}_{\tau_e}^\mathbf{v}] \mathbf{p} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_\tau$$

$$\mathbf{N}_\tau^q(\mathbf{u}) + [\mathbf{G}^T + \mathbf{K}_\tau^q + \mathbf{B}_{\tau_e}^q] \mathbf{u} + [\mathbf{G}_\tau^q + \mathbf{C}_{\tau_e}^q] \mathbf{p} = \mathbf{E}_\tau \quad (53)$$

où  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{p}$  sont les vecteurs correspondants aux coefficients des respectives expansions en terme de fonctions d'interpolation.

En se basant sur les notations de Hughes [48], les matrices données auparavant dans (50)-(53) (appelées matrices globales) sont formées à partir de l'assemblage de contributions élémentaires (matrices locales). Donc

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}_{K \in \mathfrak{S}_h} (\mathbf{k})_K, \quad \mathbf{K}_\tau^\mathbf{v} = \mathbf{A}_{K \in \mathfrak{S}_h} (\mathbf{k}_\tau^\mathbf{v})_K, \quad \mathbf{K}_\delta^\mathbf{v} = \mathbf{A}_{K \in \mathfrak{S}_h} (\mathbf{k}_\delta^\mathbf{v})_K,$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}_{K \in \mathfrak{S}_h} (\mathbf{g})_K, \quad \mathbf{G}_\tau^\mathbf{v} = \mathbf{A}_{K \in \mathfrak{S}_h} (\mathbf{g}_\tau^\mathbf{v})_K,$$

$$\mathbf{K}_\tau^q = \mathbf{A}_{K \in \mathfrak{S}_h} (\mathbf{k}_\tau^q)_K,$$

$$\mathbf{G}_\tau^q = \mathbf{A}_{K \in \mathfrak{S}_h} (\mathbf{g}_\tau^q)_K,$$

avec la loi de paroi d'ordre 1,

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_{E \in \mathbb{N}_h} (\mathbf{b})_E, \quad \mathbf{B}_{\tau_e}^{\mathbf{v}} = \mathbf{A}_{E \in \mathbb{N}_h} (\mathbf{b}_{\tau_e}^{\mathbf{v}})_E,$$

et avec la loi de paroi d'ordre 2,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{\theta} &= \mathbf{A}_{E \in \mathbb{N}_h} (\mathbf{b}^{\theta})_E, & \mathbf{B}^{\gamma} &= \mathbf{A}_{E \in \mathbb{N}_h} (\mathbf{b}^{\gamma})_E, & \mathbf{B}_{\tau_e}^q &= \mathbf{A}_{E \in \mathbb{N}_h} (\mathbf{b}_{\tau_e}^q)_E, \\ \mathbf{C} &= \mathbf{A}_{E \in \mathbb{N}_h} (\mathbf{c})_E, & \mathbf{C}_{\tau_e}^{\mathbf{v}} &= \mathbf{A}_{E \in \mathbb{N}_h} (\mathbf{c}_{\tau_e}^{\mathbf{v}})_E, & \mathbf{C}_{\tau_e}^q &= \mathbf{A}_{E \in \mathbb{N}_h} (\mathbf{c}_{\tau_e}^q)_E \end{aligned}$$

où  $\mathbf{A}$  représente l'assembleur de matrices globales.

La notation utilisée est la suivante :

$$\begin{aligned} (\mathbf{k})_K &= [(\mathbf{k})_K]_{pq} = (2\nu \varepsilon(N_b \mathbf{e}_j), \varepsilon(N_a \mathbf{e}_i))_K, \\ (\mathbf{k}_{\tau}^{\mathbf{v}})_K &= [(\mathbf{k}_{\tau}^{\mathbf{v}})_K]_{pq} = (-2\nu \nabla \cdot \varepsilon(N_b \mathbf{e}_j), \tau((\nabla(N_a \mathbf{e}_i)) \mathbf{u}) - 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(N_b \mathbf{e}_i))_K, \\ (\mathbf{k}_{\delta}^{\mathbf{v}})_K &= [(\mathbf{k}_{\delta}^{\mathbf{v}})_K]_{pq} = (\nabla \cdot (N_b \mathbf{e}_j), \delta(\nabla \cdot (N_a \mathbf{e}_i)))_K, \\ (\mathbf{g})_K &= [(\mathbf{g})_K]_{p\tilde{b}} = \left( -\tilde{N}_{\tilde{b}}, N_{a,i} \right)_K, \\ (\mathbf{g}_{\tau}^{\mathbf{v}})_K &= [(\mathbf{g}_{\tau}^{\mathbf{v}})_K]_{p\tilde{b}} = \left( \nabla \tilde{N}_{\tilde{b}}, \tau((\nabla N_a \mathbf{e}_i)) \mathbf{u} - 2\nu \nabla \cdot \varepsilon(N_b \mathbf{e}_i) \right)_K, \\ (\mathbf{k}_{\tau}^q)_K &= [(\mathbf{k}_{\tau}^q)_K]_{\tilde{a}q} = \left( -2\nu \nabla \cdot \varepsilon(N_b \mathbf{e}_j), \tau(-\nabla \tilde{N}_{\tilde{a}}) \right)_K, \\ (\mathbf{g}_{\tau}^q)_K &= [(\mathbf{g}_{\tau}^q)_K]_{\tilde{a}\tilde{b}} = \left( \nabla \tilde{N}_{\tilde{b}}, \tau(-\nabla \tilde{N}_{\tilde{a}}) \right)_K. \end{aligned}$$

Pour la loi de paroi d'ordre 1 nous avons,

$$\begin{aligned} (\mathbf{b})_E &= [(\mathbf{b})_E]_{pq} = (\nu \alpha N_b \mathbf{e}_1, N_a \mathbf{e}_1)_E, \\ (\mathbf{b}_{\tau_e}^{\mathbf{v}})_E &= [(\mathbf{b}_{\tau_e}^{\mathbf{v}})_E]_{pq} = \left( \nu \alpha \frac{\partial(N_b \mathbf{e}_1)}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial^2(N_b \mathbf{e}_1)}{\partial x_2 \partial x_1}, \tau_e \left( \nu \alpha \frac{\partial(N_a \mathbf{e}_1)}{\partial x_1} - \nu \frac{\partial^2(N_a \mathbf{e}_1)}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \right)_E \end{aligned}$$

et pour la loi de paroi d'ordre 2,

$$\begin{aligned} (\mathbf{b})_E &= [(\mathbf{b})_E]_{pq} = (\nu \mathbf{T} N_b \mathbf{e}_j, N_a \mathbf{e}_i)_E, \\ (\mathbf{b}^{\theta})_E &= [(\mathbf{b}^{\theta})_E]_{pq} = \left( \nu \theta^{-1} \frac{\partial(N_b \mathbf{e}_1)}{\partial x_1}, \frac{\partial(N_a \mathbf{e}_1)}{\partial x_1} \right)_E, \\ (\mathbf{b}^{\gamma})_E &= [(\mathbf{b}^{\gamma})_E]_{pq} = \left( \nu \gamma \frac{\partial(N_b \mathbf{e}_1)}{\partial x_1}, N_a \mathbf{e}_1 \right)_E, \\ (\mathbf{b}_{\tau_e}^{\mathbf{v}})_E &= [(\mathbf{b}_{\tau_e}^{\mathbf{v}})_E]_{pq} = \left( \nu \mathbf{T} \frac{\partial(N_b \mathbf{e}_j)}{\partial x_1} + 2\nu \phi u^t \frac{\partial(N_b \mathbf{e}_1)}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2(N_b \mathbf{e}_j)}{\partial x_2 \partial x_1} + \nu \gamma \frac{\partial^2(N_b \mathbf{e}_1)}{\partial x_1^2} \right. \\ &\quad \left. \tau_e \left( \nu \mathbf{T} \frac{\partial(N_a \mathbf{e}_i)}{\partial x_1} + 2\nu \phi u^t \frac{\partial(N_a \mathbf{e}_1)}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2(N_a \mathbf{e}_i)}{\partial x_2 \partial x_1} + \nu \gamma \frac{\partial^2(N_a \mathbf{e}_1)}{\partial x_1^2} \right) \right)_E, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{b}_{\tau_e}^q)_E &= [(\mathbf{b}_{\tau_e}^q)_E]_{\tilde{a}q} = \left( \nu \mathbf{T} \frac{\partial (N_b \mathbf{e}_j)}{\partial x_1} + 2\nu \phi u^t \frac{\partial (N_b \mathbf{e}_1)}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2 (N_b \mathbf{e}_j)}{\partial x_2 \partial x_1} + \nu \gamma \frac{\partial^2 (N_b \mathbf{e}_1)}{\partial x_1^2} \right. \\
&\quad \left. \tau_e \left( -\beta \frac{\partial^2 \tilde{N}_{\tilde{a}}}{\partial x_1^2} \right) \right)_E, \\
(\mathbf{c})_E &= [(\mathbf{c})_E]_{p\tilde{b}} = \left( -\beta \tilde{N}_{\tilde{b}}, \frac{\partial (N_a \mathbf{e}_1)}{\partial x_1} \right)_E, \\
(\mathbf{c}_{\tau_e}^v)_E &= [(\mathbf{c}_{\tau_e}^v)_E]_{p\tilde{b}} = \left( \beta \frac{\partial^2 \tilde{N}_{\tilde{b}}}{\partial x_1^2}, \tau_e \left( \nu \mathbf{T} \frac{\partial (N_a \mathbf{e}_i)}{\partial x_1} + 2\nu \phi u^t \frac{\partial (N_a \mathbf{e}_1)}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2 (N_a \mathbf{e}_i)}{\partial x_2 \partial x_1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \nu \gamma \frac{\partial^2 (N_a \mathbf{e}_1)}{\partial x_1^2} \right) \right)_E, \\
(\mathbf{c}_{\tau_e}^q)_E &= [(\mathbf{c}_{\tau_e}^q)_E]_{\tilde{a}\tilde{b}} = \left( \beta \frac{\partial^2 \tilde{N}_{\tilde{b}}}{\partial x_1^2}, -\tau_e \beta \frac{\partial^2 \tilde{N}_{\tilde{a}}}{\partial x_1^2} \right)_E
\end{aligned}$$

où

$$1 \leq i, j \leq n_{en} \cdot N \quad ; \quad 1 \leq a, b \leq n_{en} \quad ; \quad 1 \leq \tilde{a}, \tilde{b} \leq \tilde{n}_{en} \quad ;$$

$$p = N \cdot (a - 1) + i \quad ; \quad q = N \cdot (b - 1) + j \text{ et}$$

$N_a$  fonction de base pour la vitesse sur le noeud  $a$ ,

$\tilde{N}_{\tilde{a}}$  fonction de base pour la pression sur le noeud  $\tilde{a}$ ,

$a, b$  numéro local du noeud pour la vitesse,

$\tilde{a}, \tilde{b}$  numéro local du noeud pour la pression,

$p, q$  numéro local de l'équation pour la vitesse,

$n_{en}$  nombre de noeuds pour la vitesse par élément,

$\tilde{n}_{en}$  nombre de noeuds pour la pression par élément,

$\mathbf{e}_i$  élément de la base canonique de  $\mathbb{R}^N$ .

La résolution numérique des équations de Navier-Stokes incompressibles stationnaires, avec les différentes lois de paroi imposées sur le bord, suit la stratégie suivante :

*Algorithme principal*

1.  $\mathbf{u}_0, p_0$  données,
2. boucle sur le nombre de Reynolds,
3. résolution des équations  $\mathbf{u} - p$  (algorithme  $\mathbf{u} - p$ ),
4. incrémenter le nombre de Reynolds,
5. si Reynolds inférieur au Reynolds désiré, retourner à 2.

*Algorithme*  $\mathbf{u} - p$

1. boucle de la méthode de Newton

2. calculer les vecteurs résiduels, si la loi de paroi est d'ordre 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_\tau - (\mathbf{N}(\mathbf{u}) + \mathbf{N}_\tau^\mathbf{v}(\mathbf{u}) + [\mathbf{K} + \mathbf{K}_\tau^\mathbf{v} + \mathbf{K}_\delta^\mathbf{v} + \mathbf{B} + \mathbf{B}_{\tau_e}^\mathbf{v}] \mathbf{u} + \\ \quad [\mathbf{G} + \mathbf{G}_\tau^\mathbf{v}] \mathbf{p}) \\ \mathbf{S} = \mathbf{E}_\tau - (\mathbf{N}_\tau^q(\mathbf{u}) + [\mathbf{G}^T + \mathbf{K}_\tau^q] \mathbf{u} + [\mathbf{G}_\tau^q] \mathbf{p}) \end{array} \right.$$

sinon

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_\tau - (\mathbf{N}(\mathbf{u}) + \mathbf{N}_\tau^\mathbf{v}(\mathbf{u}) + \mathbf{B}^\phi(\mathbf{u}) + \\ \quad [\mathbf{K} + \mathbf{K}_\tau^\mathbf{v} + \mathbf{K}_\delta^\mathbf{v} + \mathbf{B} + \mathbf{B}^\theta + \mathbf{B}^\gamma + \mathbf{B}_{\tau_e}^\mathbf{v}] \mathbf{u} + [\mathbf{G} + \mathbf{G}_\tau^\mathbf{v} + \mathbf{C} + \mathbf{C}_{\tau_e}^\mathbf{v}] \mathbf{p}) \\ \mathbf{S} = \mathbf{E}_\tau - (\mathbf{N}_\tau^q(\mathbf{u}) + [\mathbf{G}^T + \mathbf{K}_\tau^q + \mathbf{B}_{\tau_e}^q] \mathbf{u} + [\mathbf{G}_\tau^q + \mathbf{C}_{\tau_e}^q] \mathbf{p}) \end{array} \right.$$

3. si la norme du résidu augmente ou s'il s'agit du premier pas de Newton, assembler les matrices : pour la loi de paroi d'ordre 1,

$$[\mathbf{M}^*] = \left[ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) \right] + \left[ \frac{\partial \mathbf{N}_\tau^\mathbf{v}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) \right] + [\mathbf{K}] + [\mathbf{K}_\tau^\mathbf{v}] + [\mathbf{K}_\delta^\mathbf{v}] + [\mathbf{B}] + [\mathbf{B}_{\tau_e}^\mathbf{v}],$$

$$[\mathbf{G}^*] = [\mathbf{G}] + [\mathbf{G}_\tau^\mathbf{v}],$$

$$[\mathbf{G}^{*T}] = \frac{\partial \mathbf{N}_\tau^q}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) + [\mathbf{G}^T] + [\mathbf{K}_\tau^q],$$

$$[\mathbf{C}^*] = [\mathbf{G}_\tau^q],$$

si la loi de paroi d'ordre 2 est utilisée, les matrices  $[\mathbf{M}^*]$ ,  $[\mathbf{G}^*]$ ,  $[\mathbf{G}^{*T}]$  et  $[\mathbf{C}^*]$  deviennent

$$[\mathbf{M}^*] = \left[ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) \right] + \left[ \frac{\partial \mathbf{N}_\tau^\mathbf{v}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) \right] + \left[ \frac{\partial \mathbf{B}^\phi}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) \right] + [\mathbf{K}] + [\mathbf{K}_\tau^\mathbf{v}] + [\mathbf{K}_\delta^\mathbf{v}] +$$

$$[\mathbf{B}] + [\mathbf{B}^\theta] + [\mathbf{B}^\gamma] + [\mathbf{B}_{\tau_e}^\mathbf{v}],$$

$$[\mathbf{G}^*] = [\mathbf{G}] + [\mathbf{G}_\tau^\mathbf{v}] + [\mathbf{C}] + [\mathbf{C}_{\tau_e}^\mathbf{v}],$$

$$[\mathbf{G}^{*T}] = \frac{\partial \mathbf{N}_\tau^q}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) + [\mathbf{G}^T] + [\mathbf{K}_\tau^q] + [\mathbf{B}_{\tau_e}^q],$$

$$[\mathbf{C}^*] = [\mathbf{G}_\tau^q] + [\mathbf{C}_{\tau_e}^q]$$

4. résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{M}^*] \Delta \mathbf{u} + [\mathbf{G}^*] \Delta \mathbf{p} = \mathbf{R}, \\ [\mathbf{G}^{*T}] \Delta \mathbf{u} + [\mathbf{C}^*] \Delta \mathbf{p} = \mathbf{S}, \end{array} \right.$$

5. actualiser la solution

$$\begin{cases} \mathbf{u} &= \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}, \\ \mathbf{p} &= \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}, \end{cases}$$

6. si la norme du résidu est plus grande que la tolérance, retourner à 1.

**Remarques:**

1. La résolution du système non-linéaire est faite par une méthode classique de Newton-Ralphson, combinée avec une stratégie du type Quasi-Newton. Cette stratégie consiste à calculer les matrices jacobienues dans un premier temps, et l'utiliser tant que la norme du résidu décroît. Si ce n'est pas le cas, les matrices jacobienues sont actualisées avec le dernier incrément, et la stratégie est relancée. Cela permet un gain considérable en temps de calcul.
2. Pour des calculs à haut nombre de Reynolds, l'initialisation des variables  $\mathbf{u}$  et  $p$  est importante, surtout pour des géométries complexes contenant de fortes zones de recirculation. Donc, la boucle plus à l'extérieur de l'algorithme fait référence à une stratégie d'évolution du nombre de Reynolds afin d'améliorer l'initialisation des variables. Cette stratégie consiste à résoudre le problème avec un faible nombre de Reynolds et à utiliser cette solution pour initialiser un problème à plus fort nombre de Reynolds, jusqu'à l'obtention du nombre de Reynolds désiré.
3. Pour chaque itération de Newton, le système linéaire (étape 4) est résolu par une méthode directe du type Gauss quand le problème est de faible dimension, ou par une méthode itérative du type GMRES (voir [43]) pour des problèmes plus importants. Un préconditionnement par la diagonale est utilisé pour la méthode itérative [61]. La matrice de masse est stockée par profil [48] pour la méthode directe et par la stratégie proposée par Shakib [62] pour l'approche itérative, où on conserve l'ensemble des matrices élémentaires sans assembler réellement la matrice de masse.

## 5 Validations numériques

Il s'agit maintenant de valider numériquement les différentes méthodes stabilisées. La validation est effectuée sur deux problèmes, où l'on considère une marche, soit avec des parois lisses, soit avec des parois contenant différentes formes de rugosités. L'intérêt dans le premier problème est de montrer la nécessité de la stabilisation sur le bord, en présence d'une discontinuité due au passage entre des conditions aux limites du type Dirichlet et les lois de paroi. Le deuxième problème a pour but d'étudier l'amélioration apportée par la stabilisation sur le bord, quand des discontinuités apparaissent en raison du changement du type de lois de paroi. Les validations sont faites en comparant les résultats suivants :

- les isovaleurs de  $\mathbf{u}$  et  $p$ , ainsi que des coupes de solutions à  $x_2 = cte$ , sans la stabilisation,

- les isovaleurs de  $\mathbf{u}$  et  $p$ , ainsi que des coupes de solutions à  $x_2 = cte$ , avec la stabilisation,
- les isovaleurs de  $\mathbf{u}$  et  $p$ , ainsi que des coupes de solutions à  $x_2 = cte$ , obtenus de façon classique, en utilisant la condition de non-glissement à la paroi ( $\mathbf{u} = 0$ ).

En ce qui concerne la discrétisation, des éléments bilinéaires du type Q1/Q1 ont été employés pour l'ensemble des problèmes.

## 5.1 Marche lisse

Dans la plupart des problèmes d'intérêt pratique, on impose à l'entrée du domaine (et souvent à la sortie) des conditions de Dirichlet pour la vitesse. Souvent ces conditions aux limites correspondent à des profils de vitesse venus de problèmes expérimentaux. Alors, l'emploi des lois de paroi sur une partie du bord, crée une importante zone de discontinuité, en raison du changement du type de condition aux limites. En fonction de l'importance de cette discontinuité, des instabilités numériques peuvent être créées et se propagent à l'intérieur du domaine. Le but de cette validation est de démontrer l'importance de l'utilisation de la stabilisation dans ce cas. Le domaine du calcul est défini dans la figure 3.

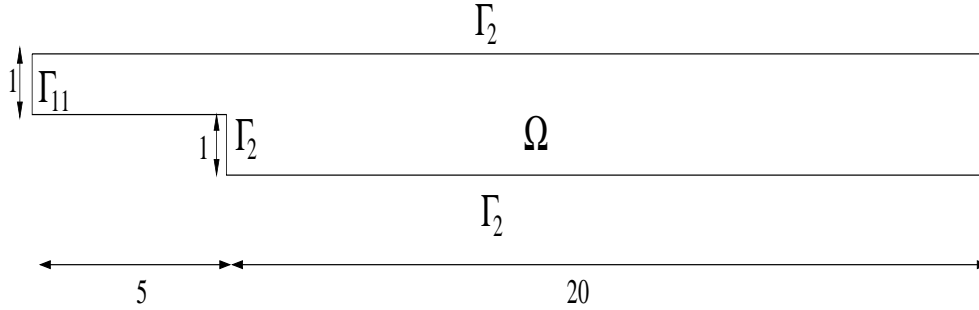


FIG. 3: Le domaine du calcul est une marche avec des parois lisses.

On impose à l'entrée  $\Gamma_{11}$  un profil de vitesse  $\mathbf{u} = (1, 0)$ , à la sortie  $\Gamma_{12}$  des conditions de Neumann homogènes et sur  $\Gamma_2$  les lois de paroi d'ordre 1 et 2. Le nombre de Reynolds est fixé à  $Re = 300$  et les lois de paroi sont imposées à une distance  $\delta = 5 \times 10^{-3}$  de la paroi. Les constantes contenues dans les lois de paroi sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\delta}, & \beta &= \frac{2}{\delta^2}, & \gamma &= 0, \\ \theta &= \frac{1}{2\delta}, & \phi &= 0. \end{aligned} \tag{54}$$

On effectue le calcul direct ( $\mathbf{u} = 0$  à la paroi) et les calculs avec les lois de paroi d'ordre 1 et 2 (figure 4) sur un maillage contenant 1200 éléments. Les formulations stabilisées pour la loi de paroi d'ordre 1 et d'ordre 2 corrigent parfaitement les oscillations dues au changement du type de condition aux limites (figure 5-7 pour la



loi de paroi d'ordre 1 et figures 8 et 9 pour celle au deuxième ordre). D'importantes améliorations ont été apportées par l'utilisation des lois de paroi d'ordre élevées, en particulier d'ordre 2 (figures 10 et 11).

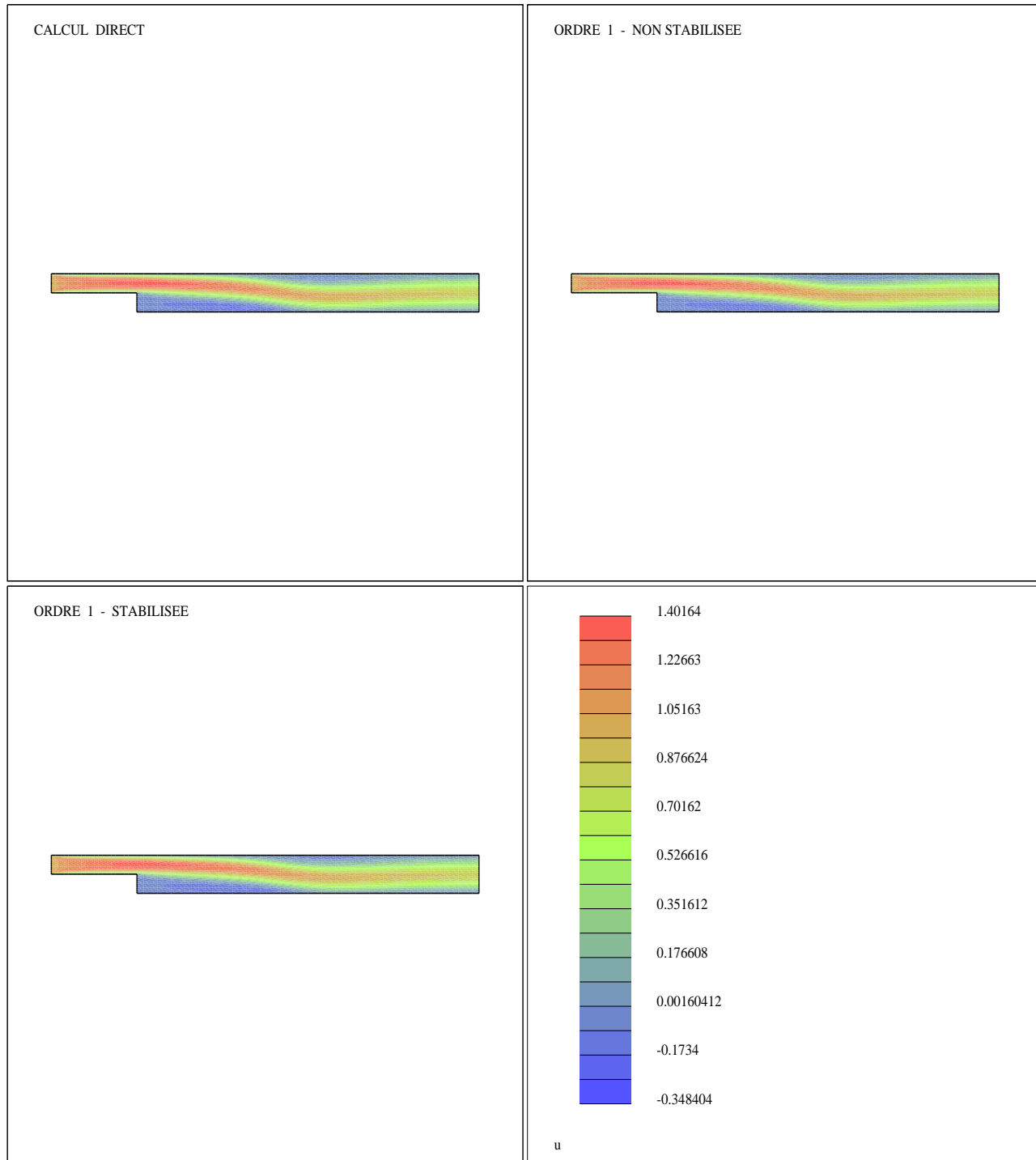


FIG. 4: Isovaleurs de la vitesse tangentielle obtenues avec la loi de paroi d'ordre 1, avec et sans la stabilisation, et le calcul direct ( $u = 0$  à la paroi).

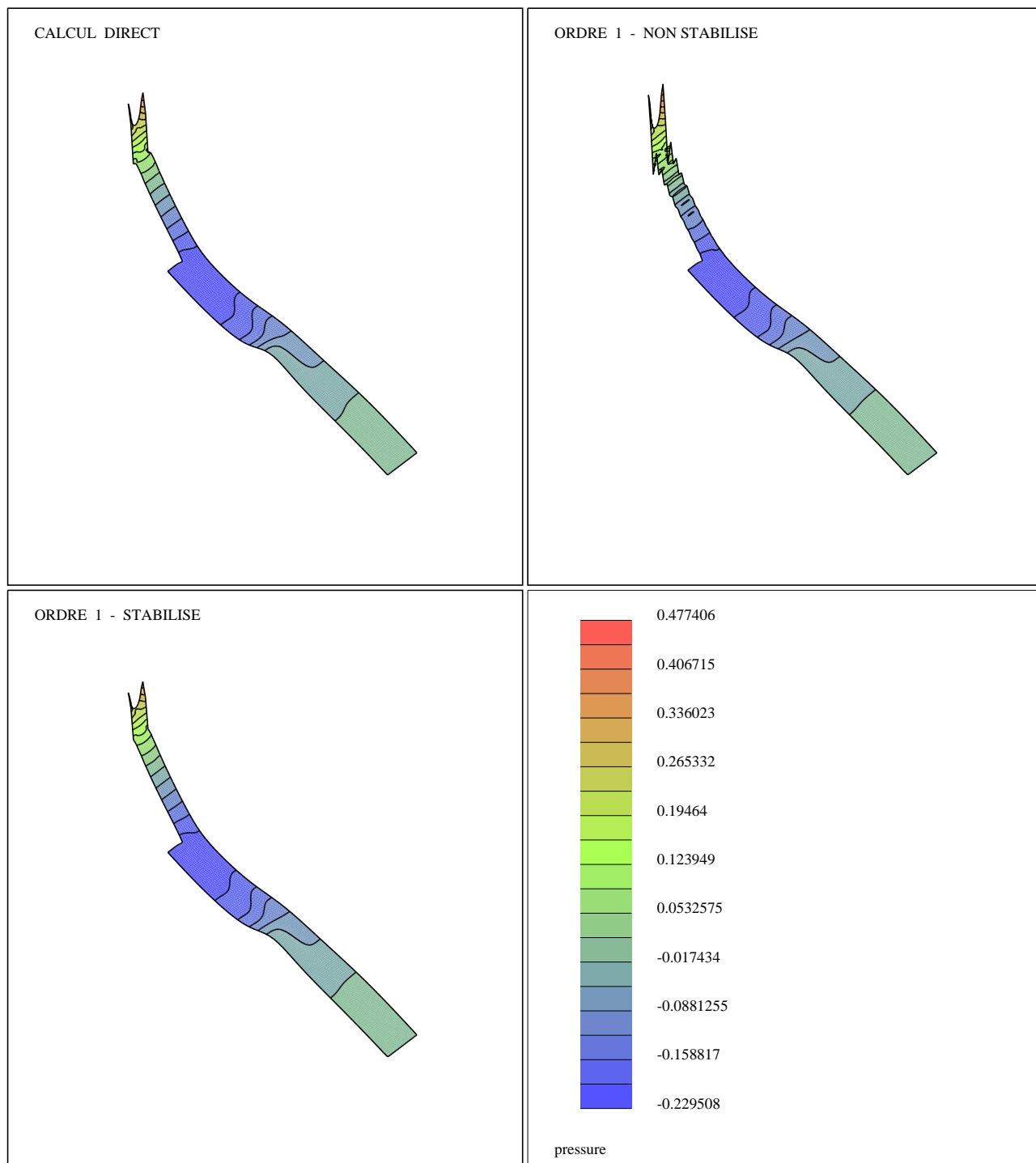


FIG. 5: La pression obtenue avec la loi de paroi d'ordre 1, avec et sans la stabilisation, et le calcul direct. On remarque d'importantes oscillations sur la solution non stabilisée, qui sont parfaitement corrigées par l'introduction de la formulation avec stabilisation sur le bord.

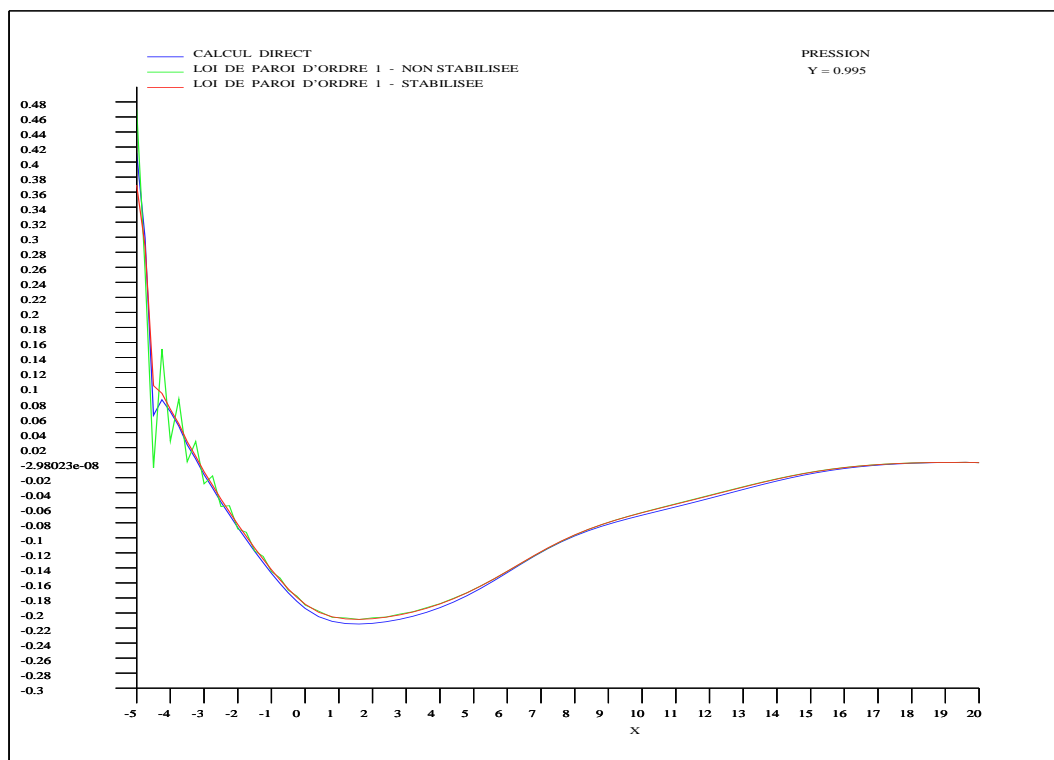
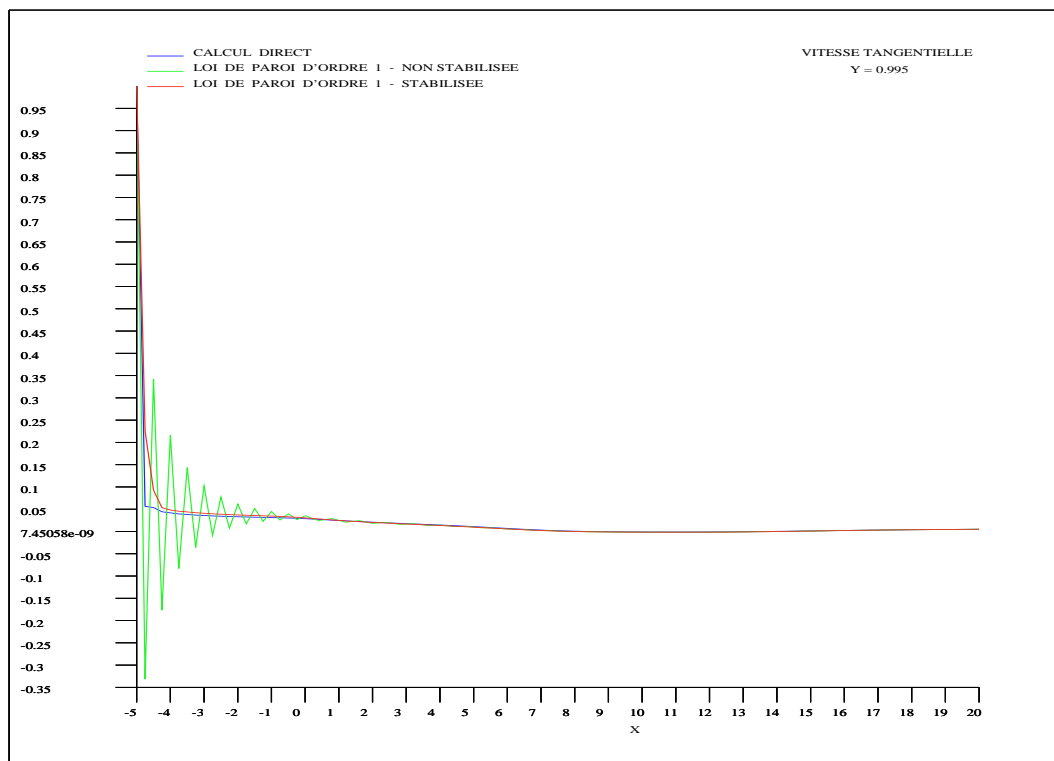


FIG. 6: Comparaison entre le profil de la vitesse tangentielle (en haut) et la pression (en bas) entre le calcul direct et la loi de paroi d'ordre 1 avec et sans stabilisation ( $\delta = 0.995$ ). La nouvelle méthode stabilisée corrige parfaitement les oscillations, dues au changement de conditions aux limites.

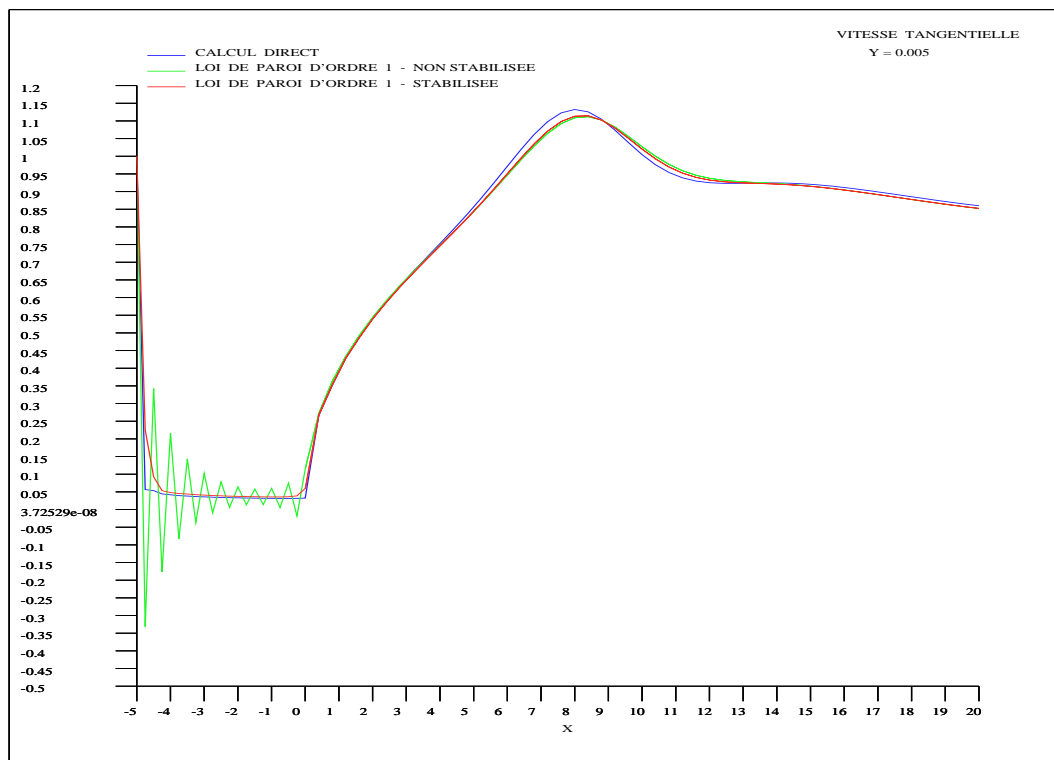
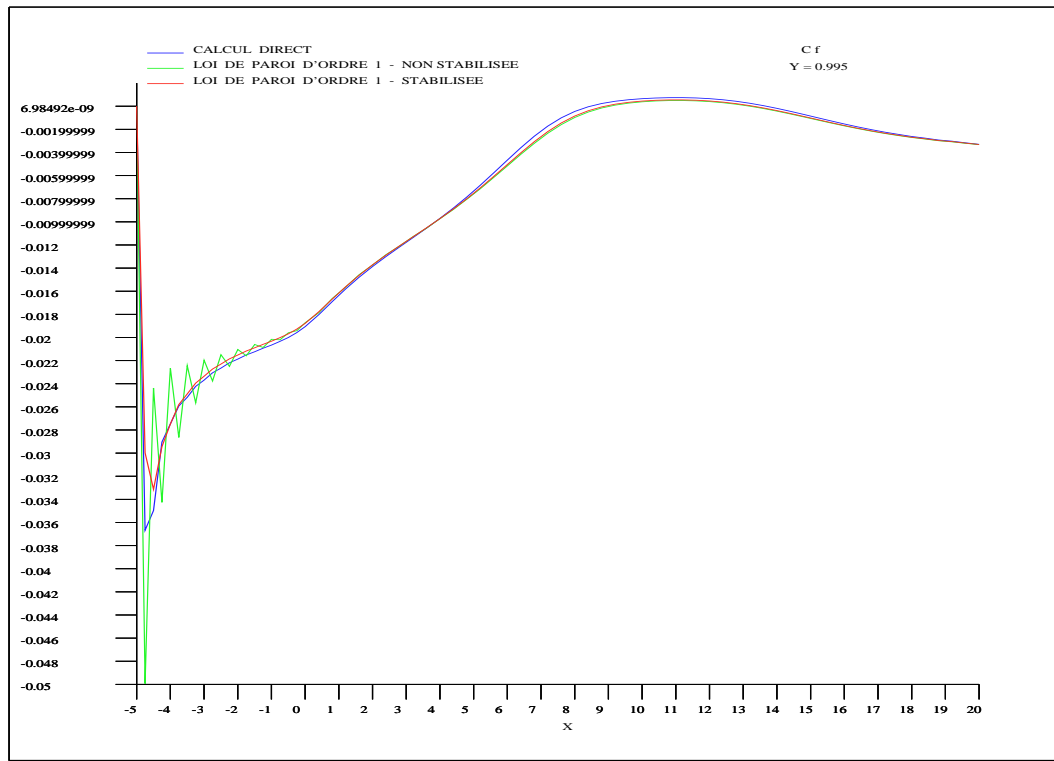


FIG. 7: Comparaison entre le profil de  $C_f$  (en haut) à  $\delta = 0.995$  et la vitesse tangentielle (en bas) à  $\delta = 0.005$  entre le calcul direct et la loi de paroi d'ordre 1, avec et sans stabilisation. On remarque l'amélioration sensible des solutions apportée par l'introduction de la stabilisation sur le bord.

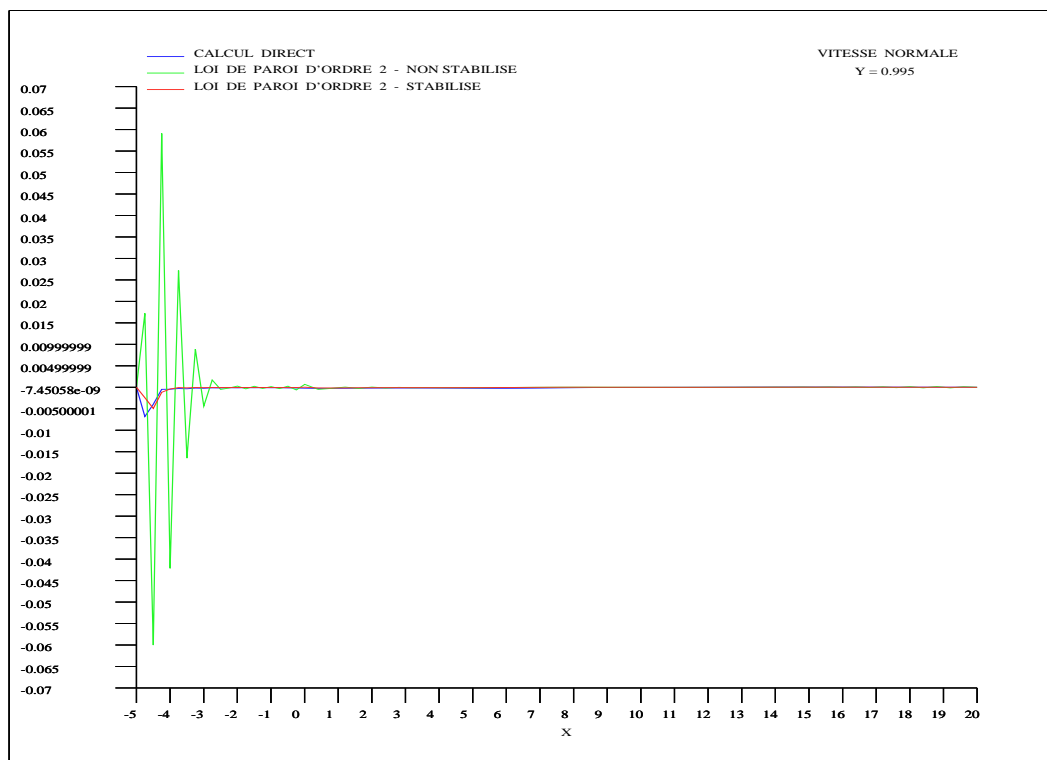
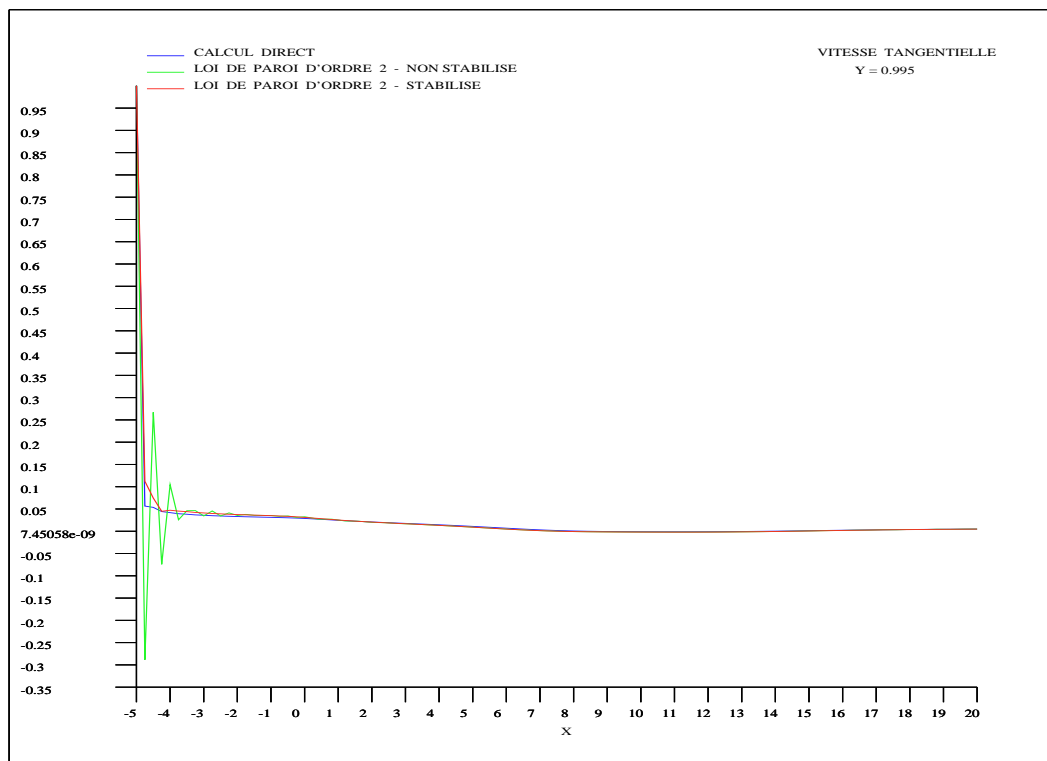


FIG. 8: Comparaison entre le profil de la vitesse tangentielle (en haut) et normale (en bas) entre le calcul direct et la loi de paroi d'ordre 2, avec et sans stabilisation ( $\delta = 0.995$ ). La stabilisation appliquée à la loi de paroi d'ordre 2 corrige les oscillations de la vitesse normale.

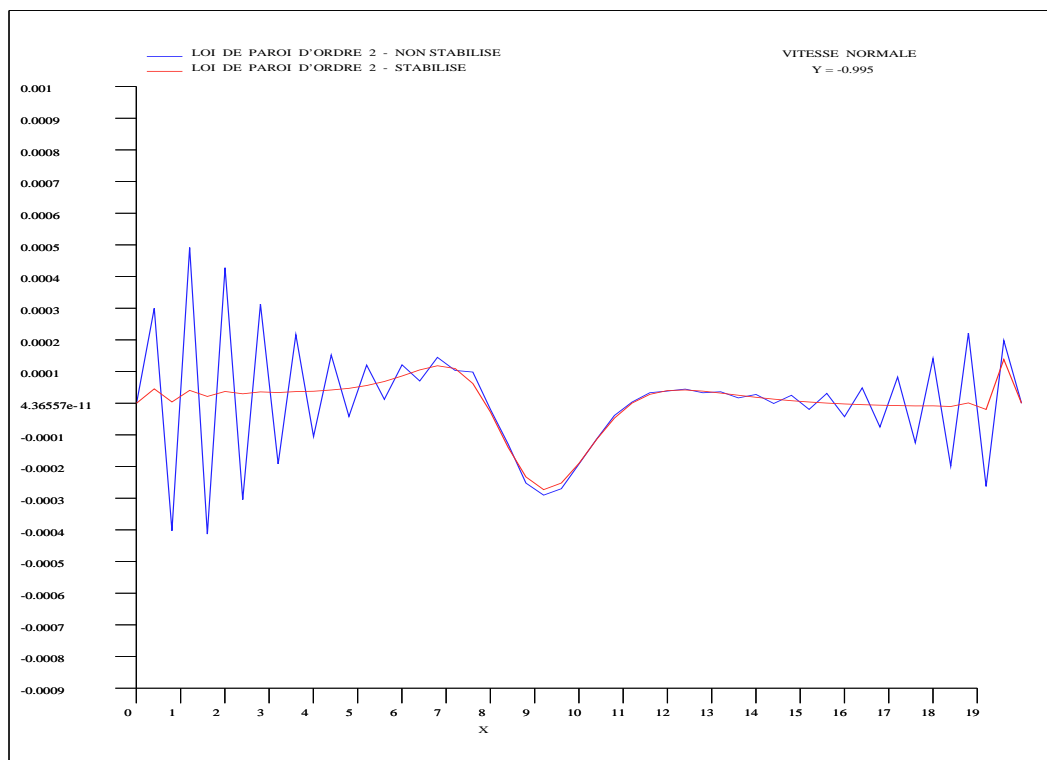
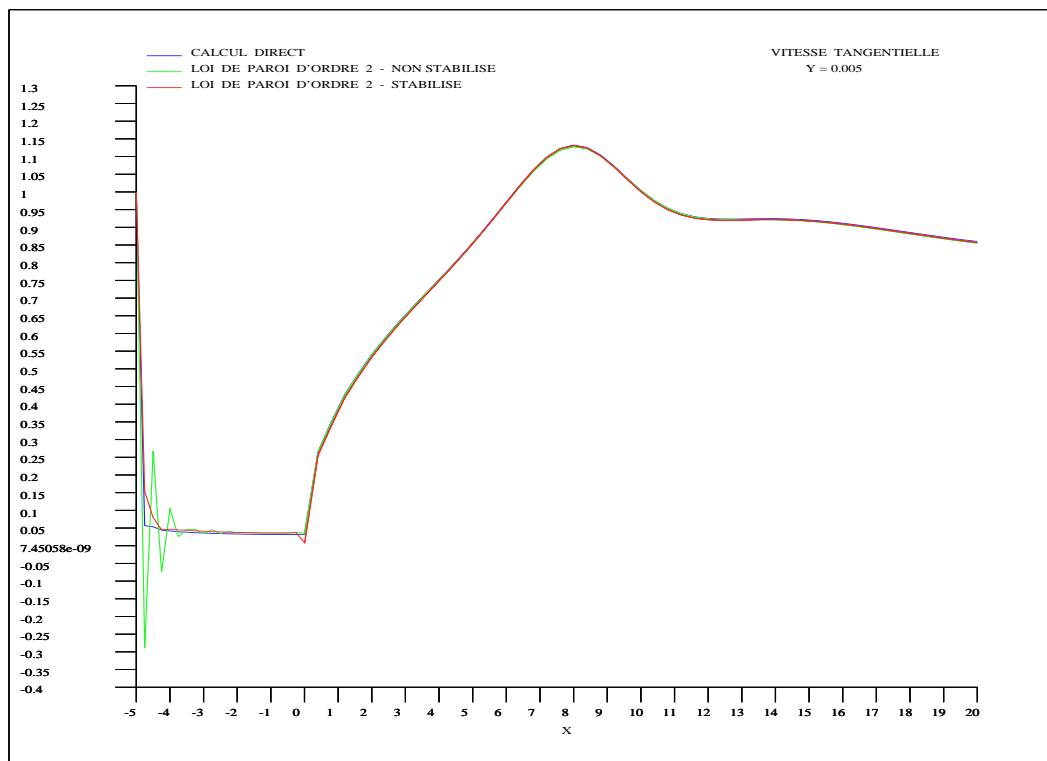


FIG. 9: Comparaison entre le profil de la vitesse normale entre le calcul direct et la loi de paroi d'ordre 2 avec et sans stabilisation à  $\delta = 0.005$  (en haut). En bas, on compare les mêmes profils à  $\delta = -0.995$ . La formulation variationnelle stabilisée, corrige les oscillations de la vitesse normale, en apportant un meilleur contrôle dans la semi-norme  $H^1$  du bord.

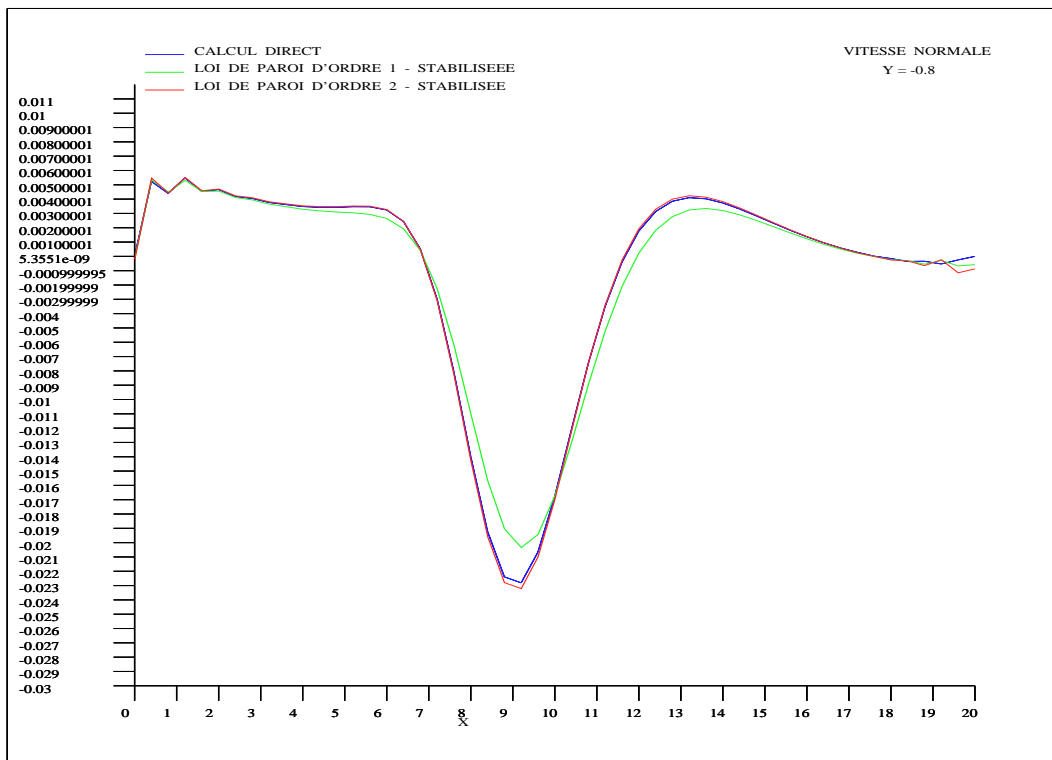
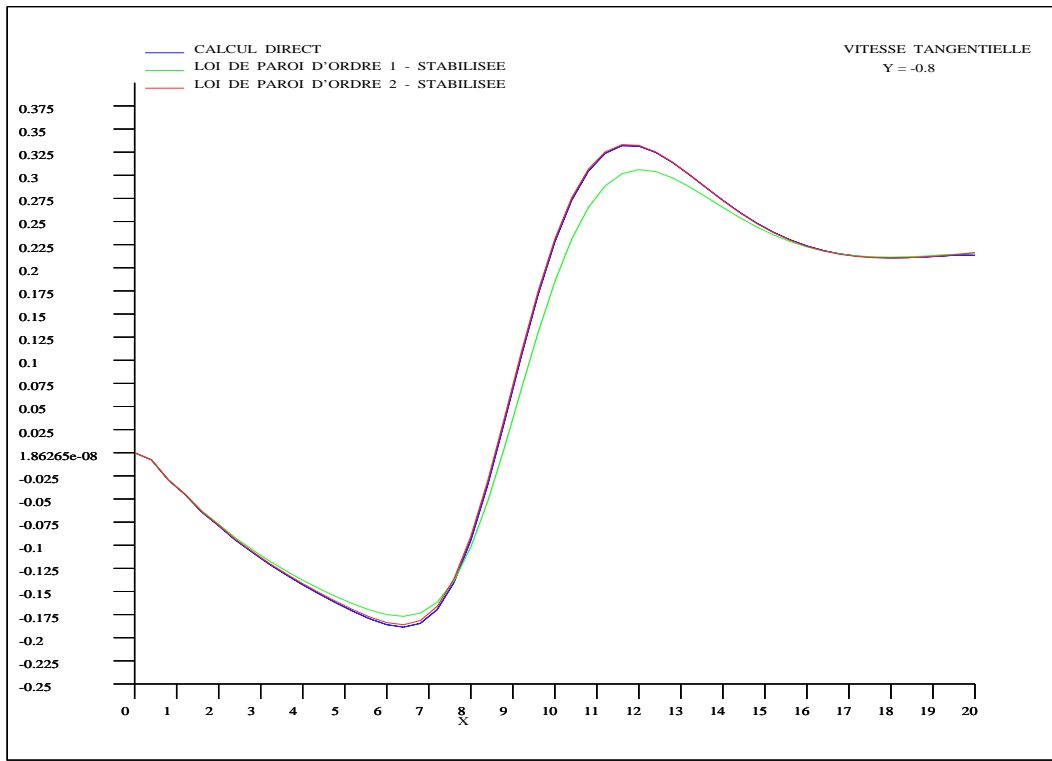


FIG. 10: Comparaison entre le profil de vitesse tangentielle (en haut) et normale (en bas) à  $\delta = -0.8$  entre la loi de paroi d'ordre 1, la loi de paroi d'ordre 2 et le calcul direct. On remarque l'amélioration apportée par le passage à l'ordre 2.

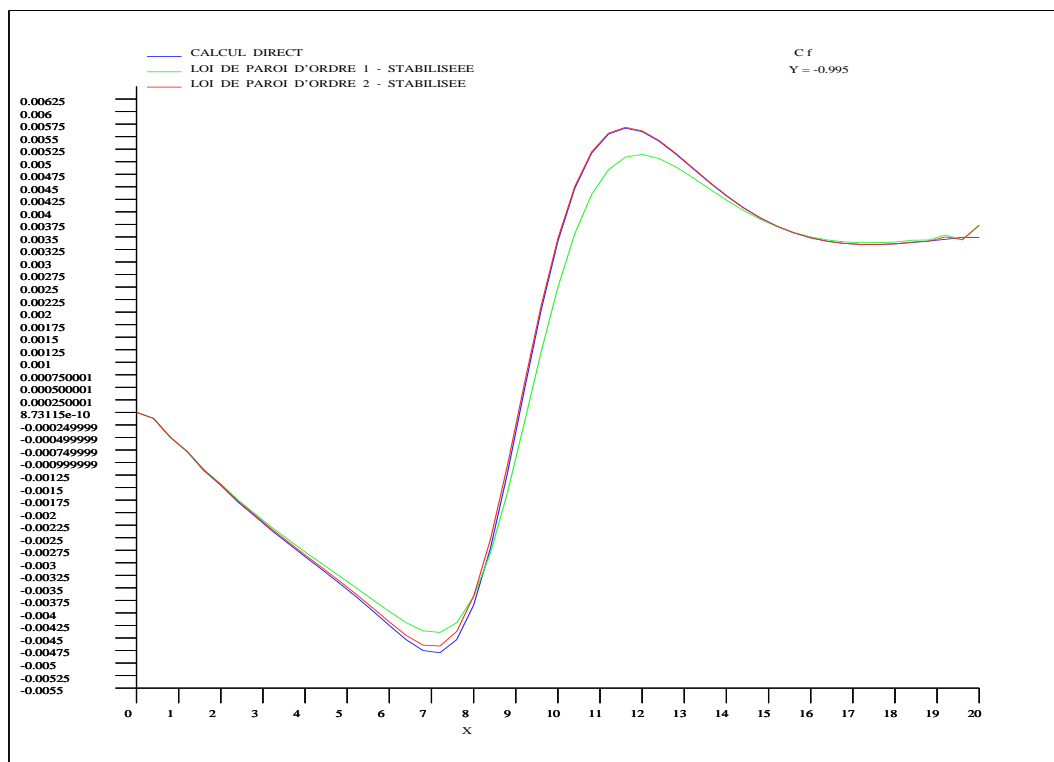
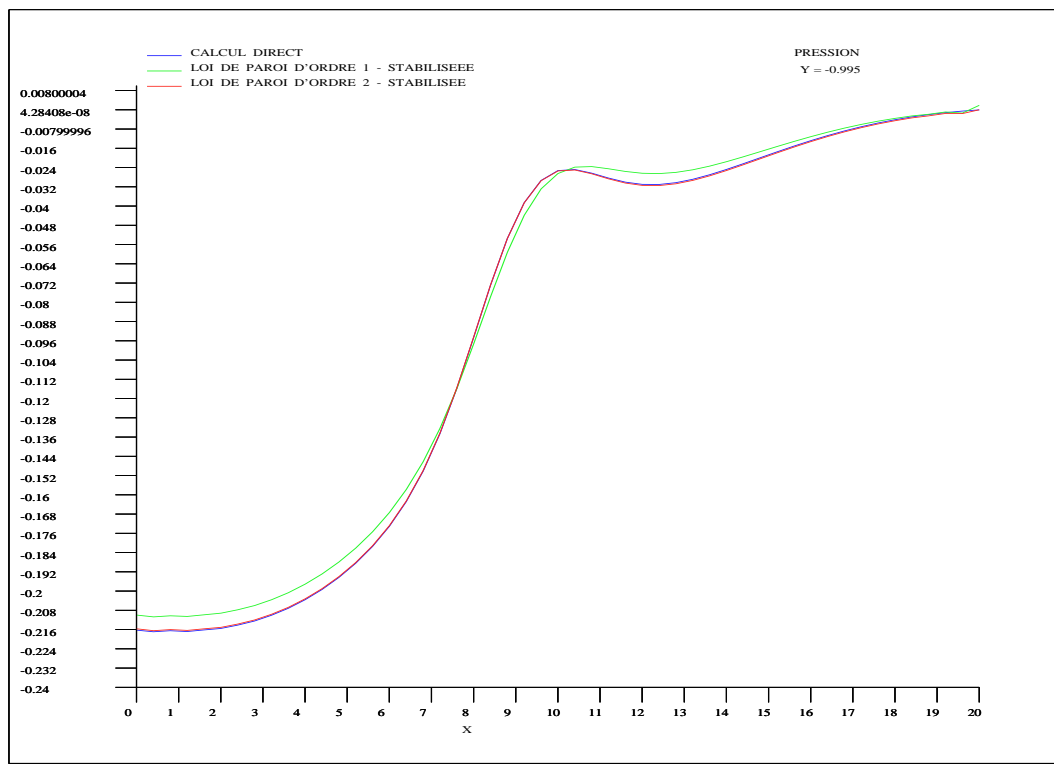


FIG. 11: Comparaison entre le profil de pression (en haut) et le coefficient de friction (en bas) à  $\delta = -0.995$ , entre la loi de paroi d'ordre 1, la loi de paroi d'ordre 2 et le calcul direct. La recirculation est mieux approchée en utilisant la loi de paroi d'ordre 2.



## 5.2 Marche rugueuse

Dans ce problème, on étudie l'apport de la stabilisation sur le bord, quand des discontinuités surviennent en raison du changement du type de la loi de paroi. On retrouve souvent ce type de problème dans des domaines d'intérêt pratique. Des surfaces peuvent à la fois contenir des régions lisses, suivies de régions rugueuses, contenant à leur tour différentes formes de rugosités. Donc, les valeurs des constantes contenues dans les lois de paroi sont différentes en fonction du type de paroi, et par conséquent, des régions de discontinuités sont créées, détruisant la stabilité de la solution sur le bord.

Le domaine est donné par la figure 12.

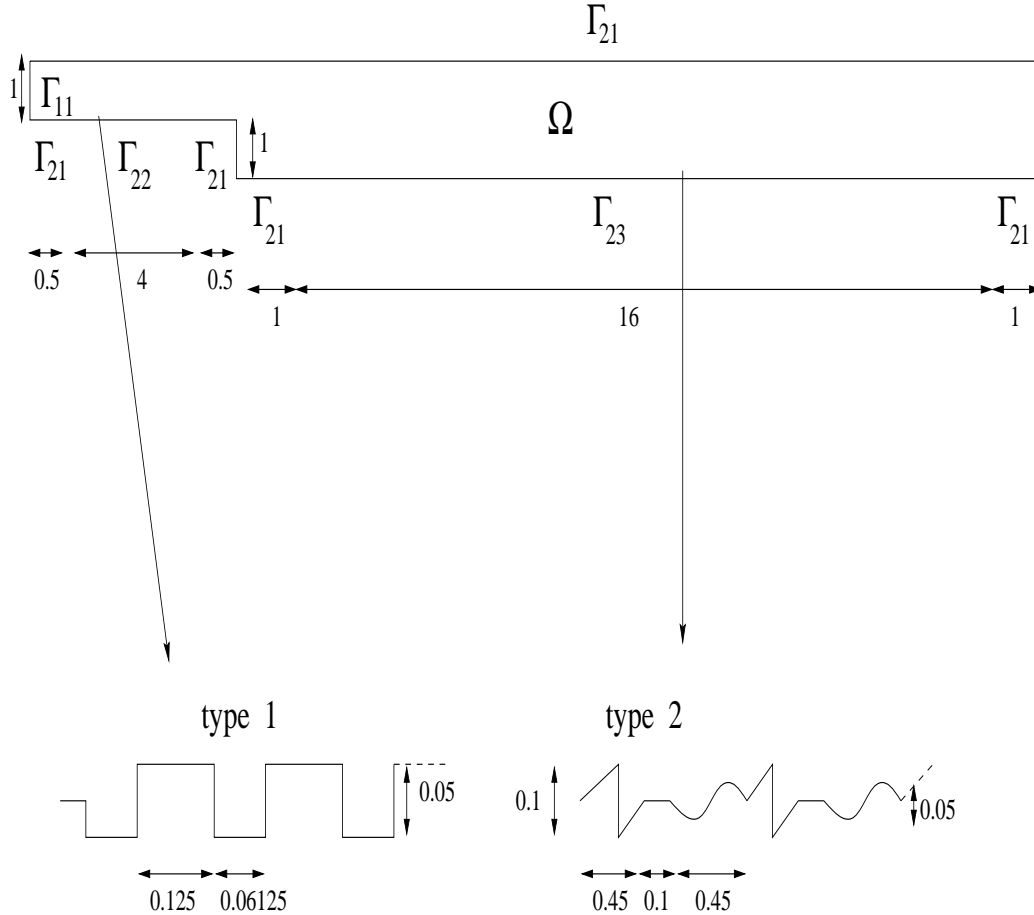


FIG. 12: Le domaine de calcul est constitué par une marche, composée de parois lisses et rugueuses de différents types.

Un profil parabolique  $\mathbf{u} = (4 \times x_2 \times (1 - x_2), 0)$  est imposé à l'entrée  $\Gamma_{11}$  et on impose à la sortie  $\Gamma_{12}$  des conditions de Neumann homogènes. La partie inférieure de la marche est composée de plusieurs type de paroi: une paroi lisse (notée  $\Gamma_{21}$ ), une paroi rugueuse du type 1 (notée  $\Gamma_{22}$ ) et une paroi rugueuse du type 2 (notée  $\Gamma_{23}$ ). Sur chaque type de paroi, on impose des lois de paroi d'ordre 1 et d'ordre 2, différentes suivant les valeurs des constantes. Le nombre de Reynolds est fixé à

$Re = 250$ , la dimension caractéristique de la rugosité prise comme  $\varepsilon = 2.5 \times 10^{-2}$  et les lois de paroi sont imposées à  $\delta = 2.5 \times 10^{-2}$  de la paroi. Les constantes sont les suivantes : pour la partie lisse, elles sont données par (54), pour la partie rugueuse comprenant les rugosités du premier type, elles sont données par

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\delta - \varepsilon \times 0.6}, & \beta &= \frac{0.52 \times \varepsilon^2 - 0.6 \times \delta \times \varepsilon + \frac{\delta^2}{2}}{\nu \times (\delta - \varepsilon \times 0.6)}, \\ \gamma &= \frac{-0.2404 \times 0.6 \times \varepsilon + 0.136}{\delta - \varepsilon \times 0.6}, & \theta &= \frac{\delta - \varepsilon \times 0.6}{0.398 \times \varepsilon^2 - 0.6 \times \delta - \frac{\delta^2}{2\varepsilon}}, \end{aligned} \quad (55)$$

$$\phi = 0$$

et pour les rugosités du deuxième type

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\delta - \varepsilon \times 0.841}, & \beta &= \frac{0.402 \times \varepsilon^2 - 0.841 \times \delta \times \varepsilon + \frac{\delta^2}{2}}{\nu \times (\delta - \varepsilon \times 0.841)}, \\ \gamma &= 0, & \theta &= \frac{\delta - \varepsilon \times 0.841}{0.402 \times \varepsilon^2 - 0.841 \times \delta - \frac{\delta^2}{2\varepsilon}}, \end{aligned} \quad (56)$$

$$\phi = 0.$$

Le maillage pour le calcul direct est composé de 12500 éléments afin de prendre en compte correctement les rugosités (figure 19). En contrepartie, pour les calculs utilisant les lois de paroi d'ordre zéro ( $\mathbf{u}=0$  à la paroi), d'ordre 1 et d'ordre 2, un maillage composé de 1200 éléments a été employé. L'utilisation des méthodes stabilisées pour la loi de paroi d'ordre 1 (figures 13-15) et d'ordre 2 (figures 16 et 17) corrige parfaitement les oscillations dues au changement du type de loi de paroi. De sensibles améliorations de l'approximation du calcul direct sont obtenues par l'utilisation des lois de paroi d'ordre élevé, en particulier d'ordre 2. En effet, les profils de pression et de  $C_f$ , ainsi que la taille de la recirculation sont parfaitement retrouvés (figures 18-21).

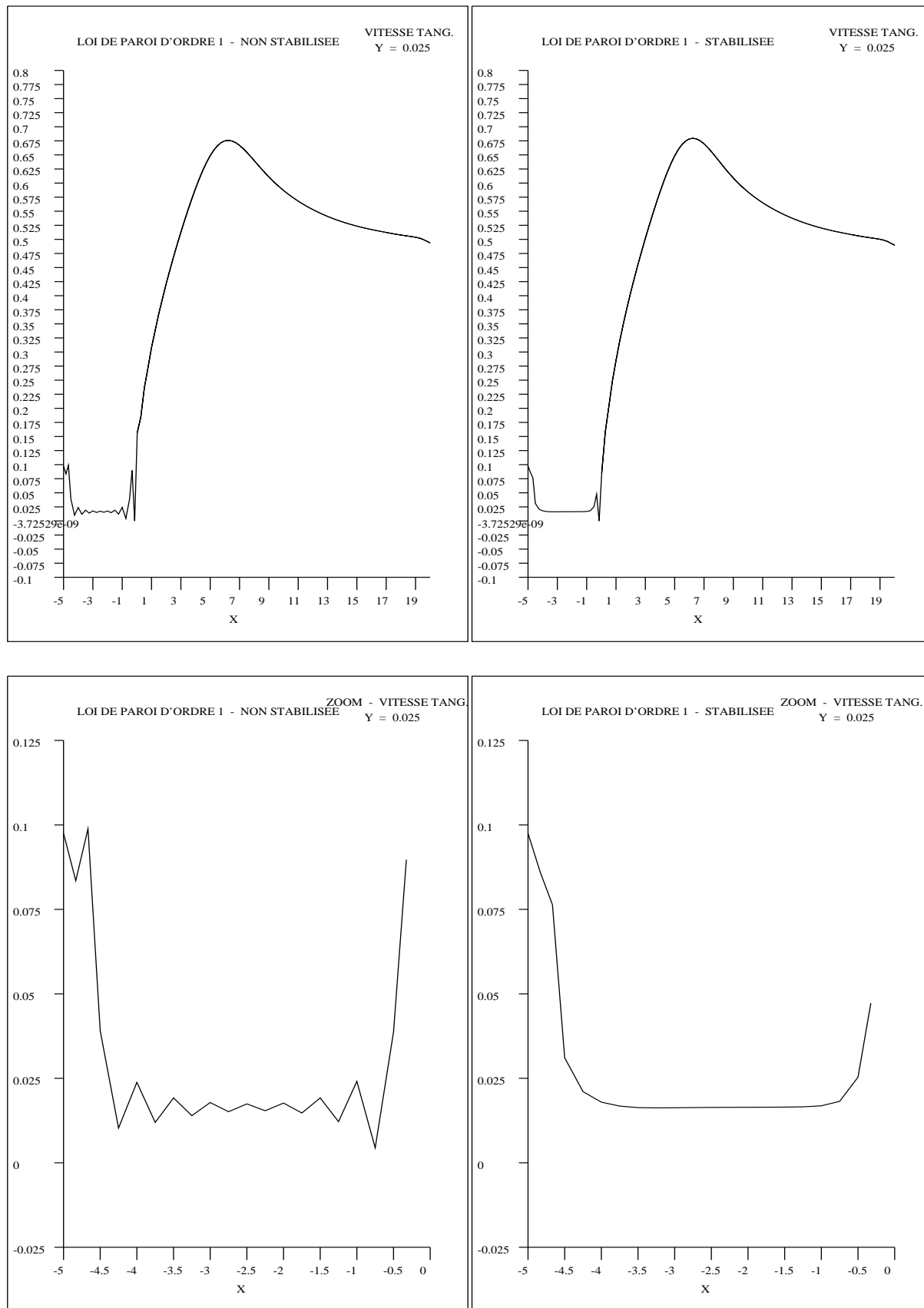


FIG. 13: Comparaison entre la vitesse tangentielle (en haut) à  $\delta = 0.025$  et la loi de paroi d'ordre 1, avec et sans stabilisation. En bas, zoom du profil de la vitesse tangentielle. Le changement de loi de paroi crée une discontinuité de la solution qui détruit la stabilité. La formulation variationnelle stabilisée corrige les oscillations.

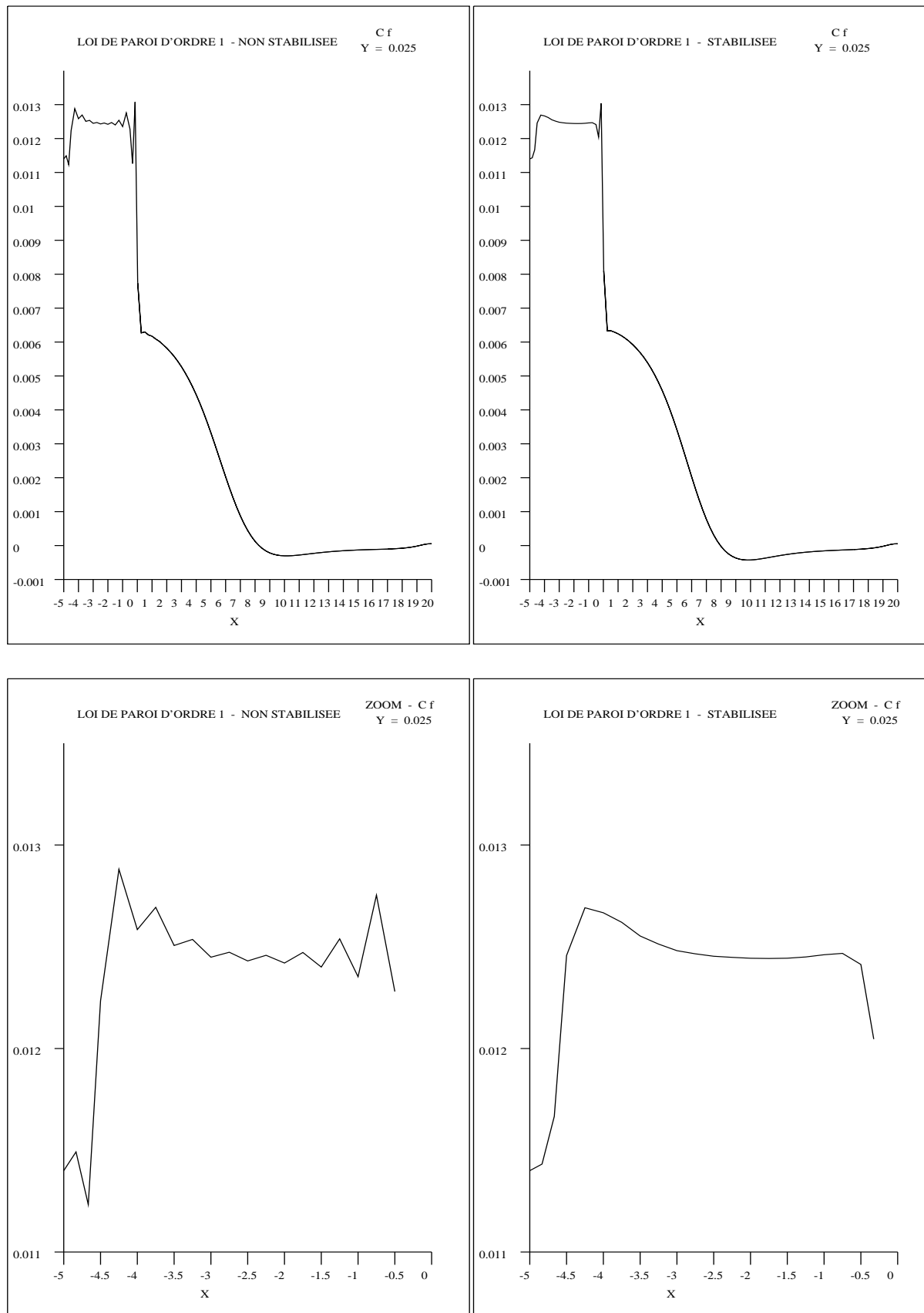


FIG. 14: Comparaison entre le  $C_f$  (en haut) à  $\delta = 0.025$  et la loi de paroi d'ordre 1, avec et sans stabilisation. En bas, zoom du profil de  $C_f$ . On retrouve une meilleure stabilité sur le bord avec la nouvelle formulation.

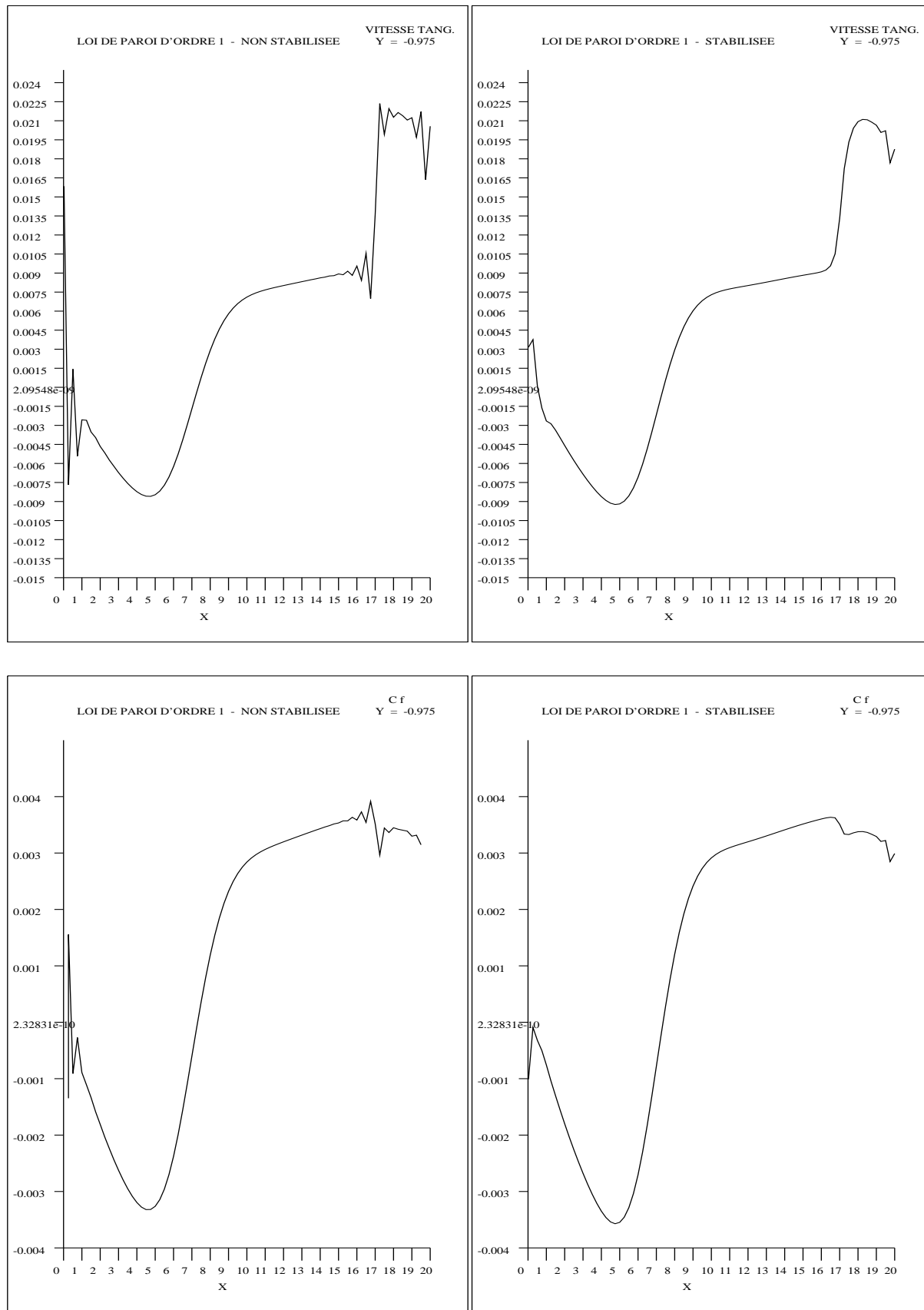


FIG. 15: Comparaison entre les profils de la vitesse tangentielle (en haut) et du  $C_f$  (en bas) à  $\delta = -0.975$ , obtenus avec la loi de paroi d'ordre 1, avec et sans stabilisation.

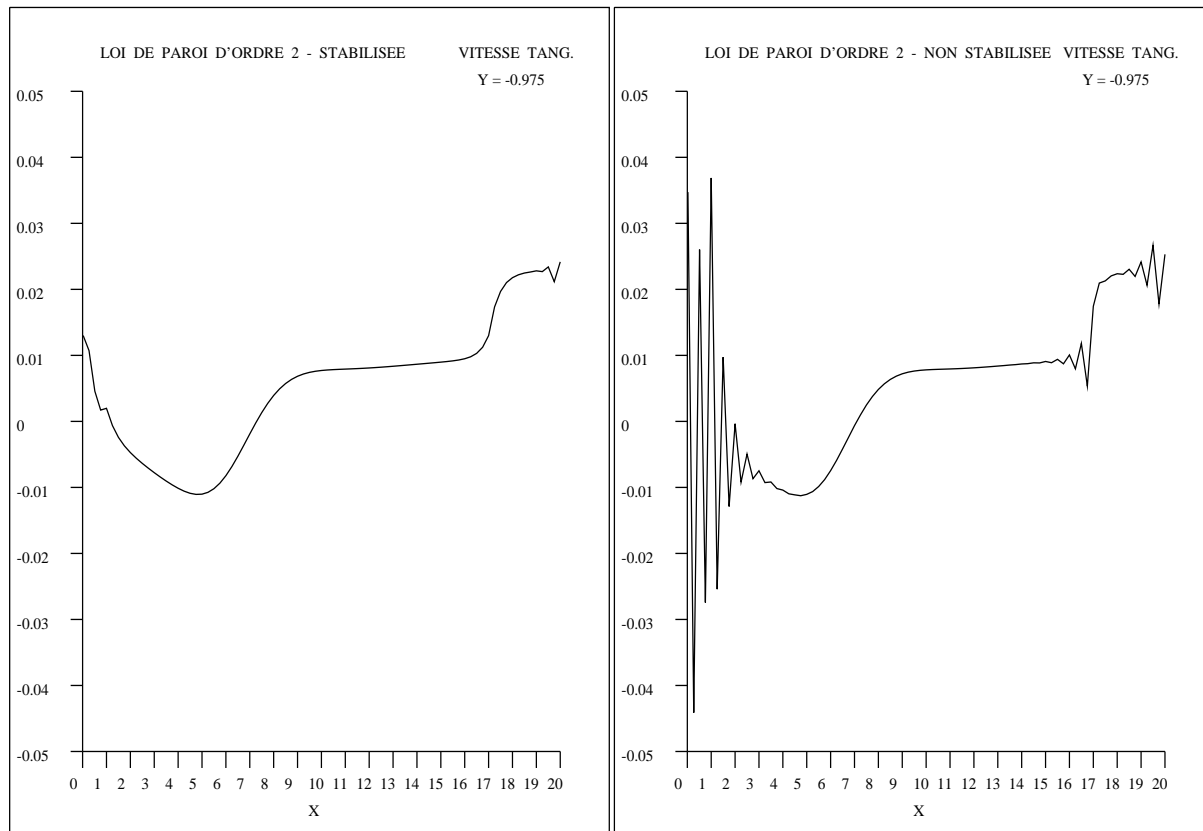
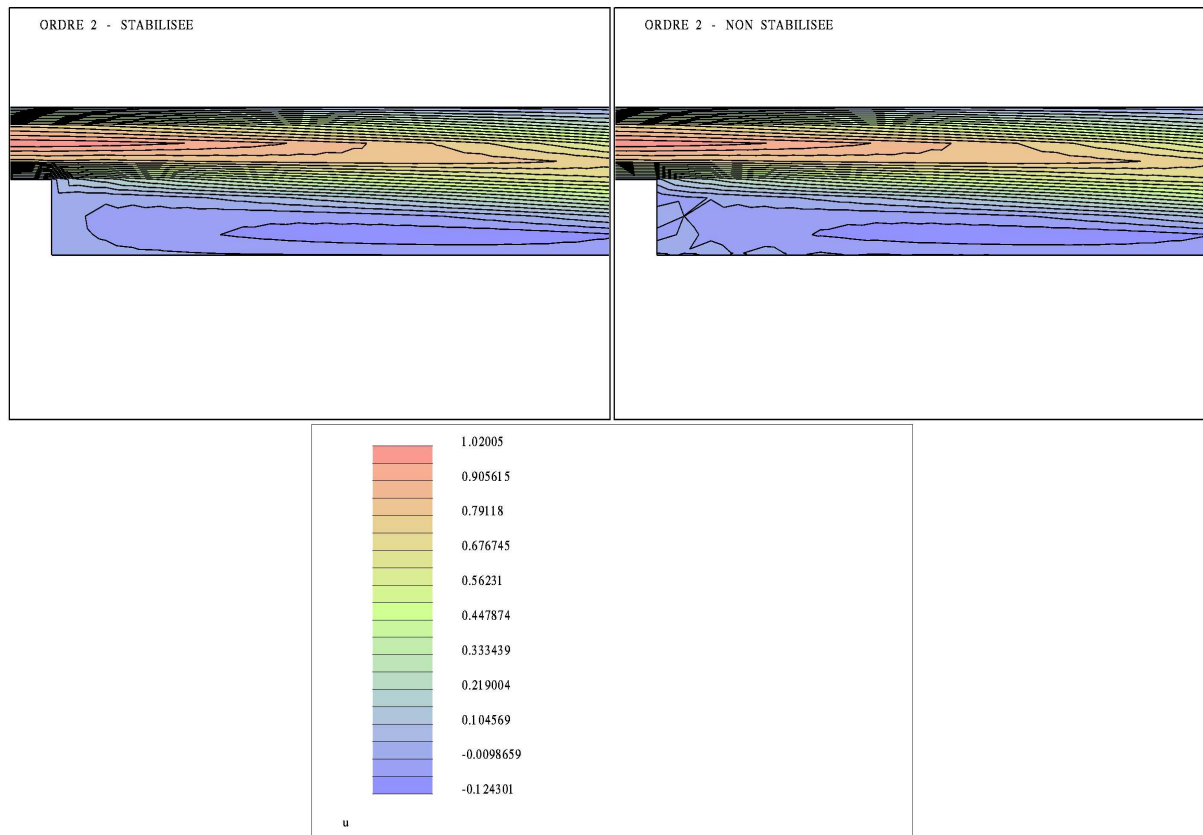


FIG. 16: Comparaison entre les isovaleurs de la vitesse tangentielle (en haut) en utilisant la formulation stabilisée et la non stabilisée pour la loi de paroi d'ordre 2. On remarque les importantes corrections de oscillations apportées par la stabilisation (en bas).

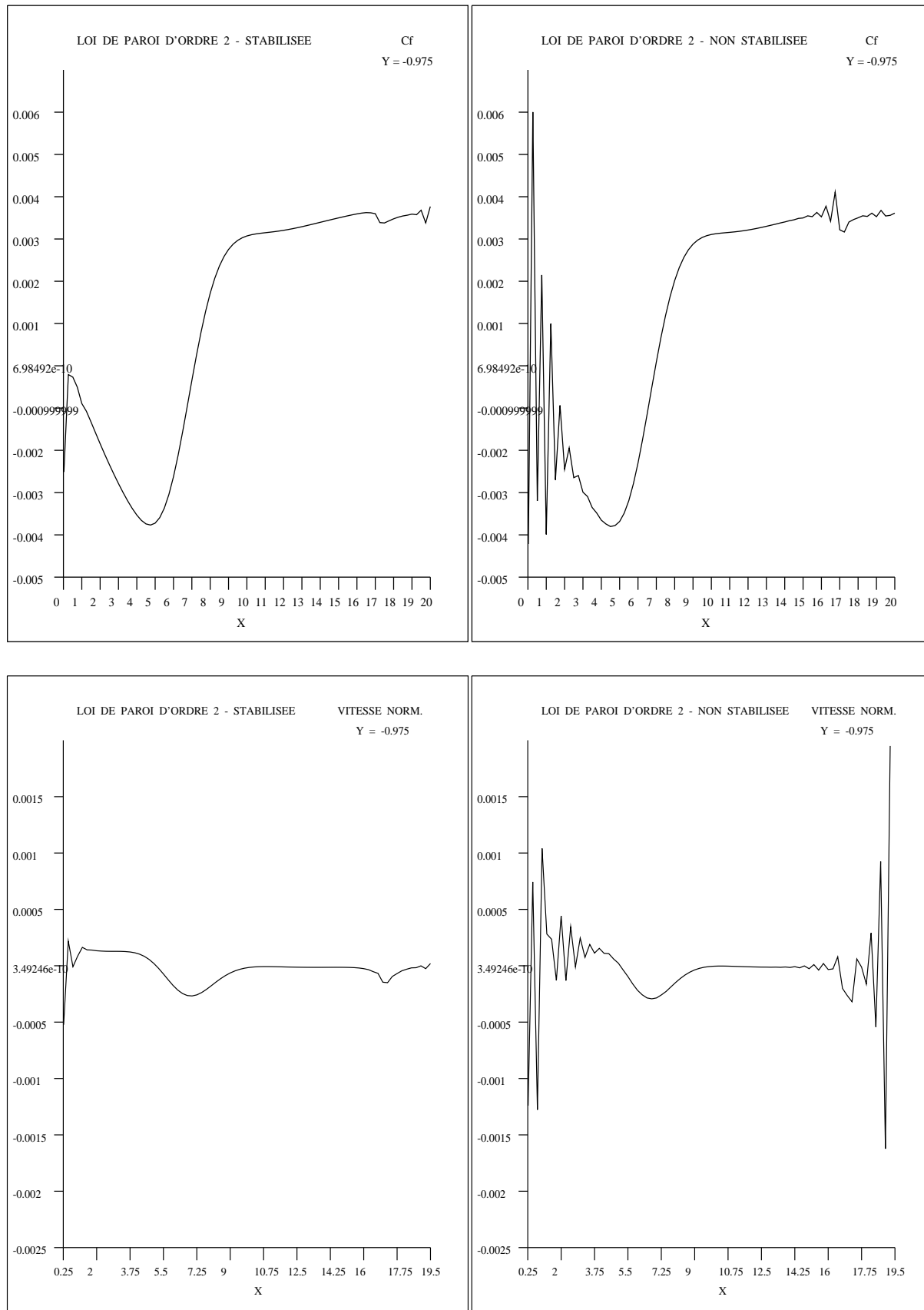


FIG. 17: Comparaison entre le  $C_f$  (en haut) et la vitesse normale (en bas) à  $\delta = -0.975$  obtenus en imposant la loi de paroi d'ordre 2 avec et sans la stabilisation sur le bord. Les résultats montrent la nécessité de l'utilisation de la formulation stabilisée.

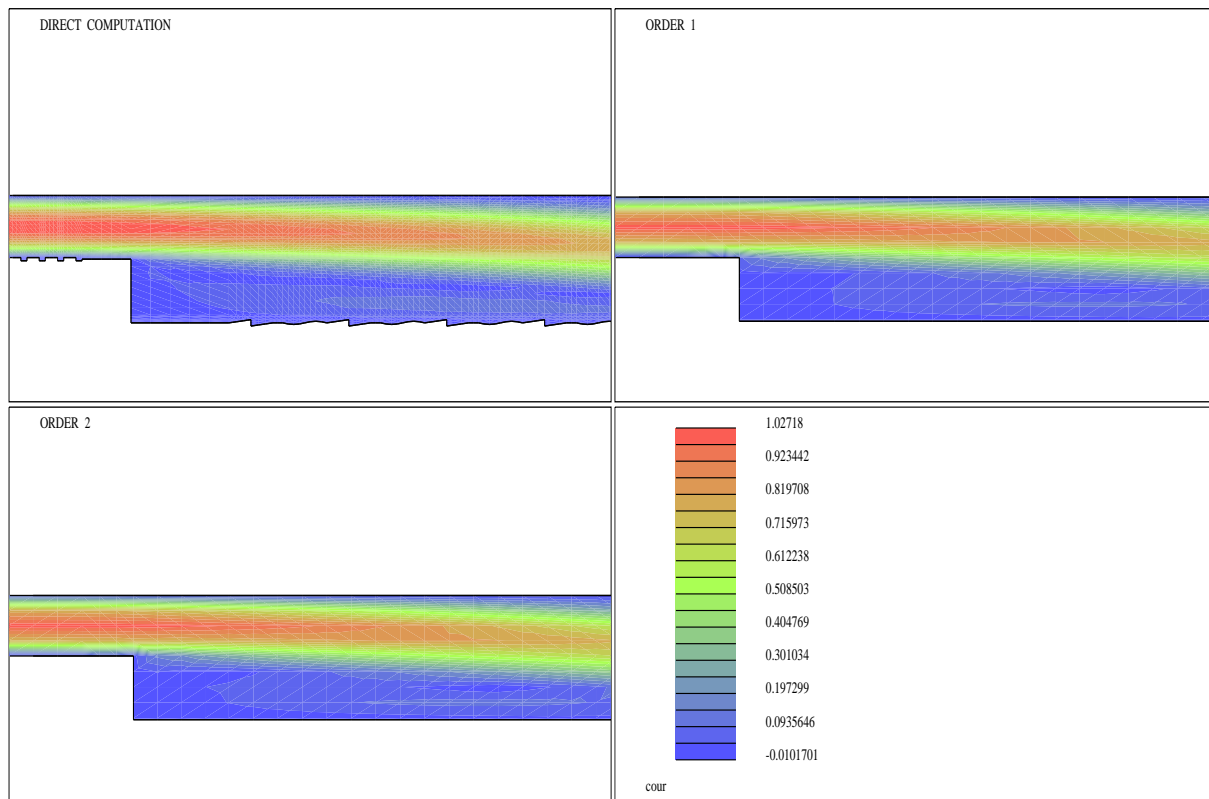


FIG. 18: *Isovaleurs de  $|u|$  obtenues par le calcul direct et en imposant les lois de paroi d'ordre 1 et d'ordre 2.*

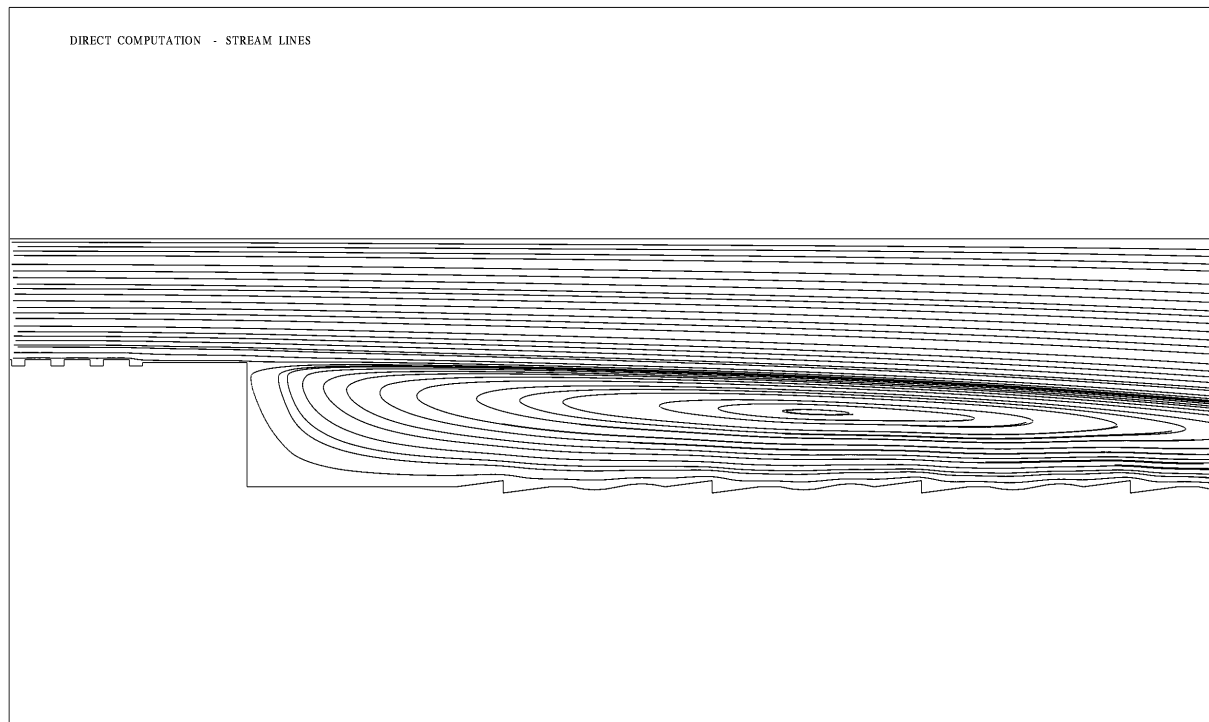


FIG. 19: *Agrandissement des lignes de courants obtenues par le calcul direct. On aperçoit l'influence des différentes formes de rugosités.*



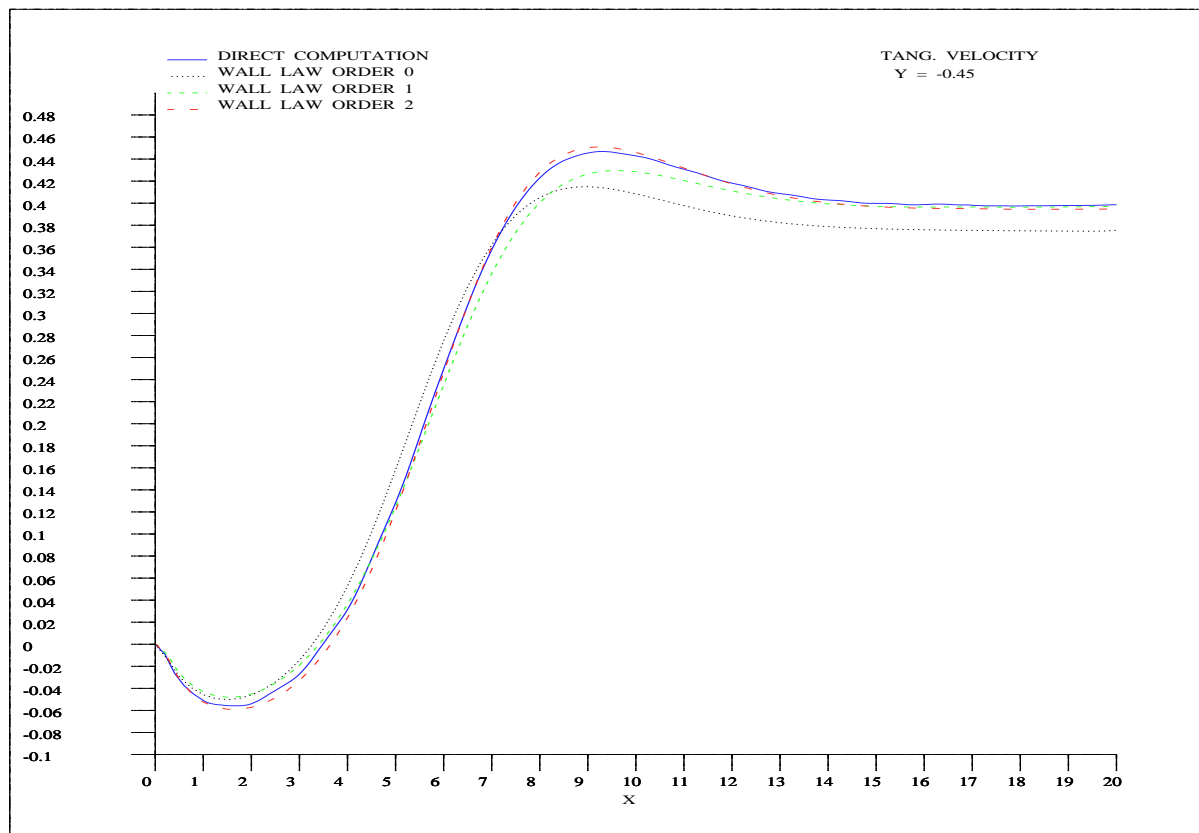
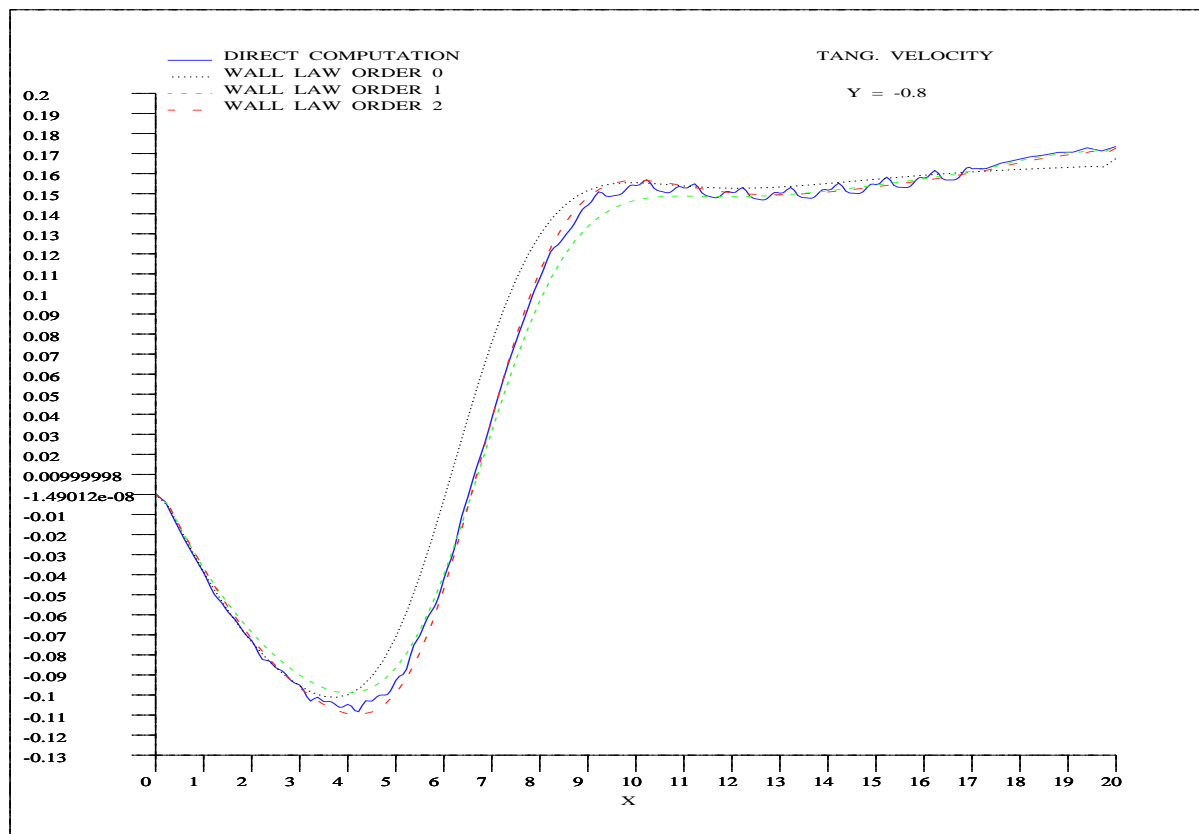


FIG. 20: Comparaison entre les profils de la vitesse tangentielle obtenus par le calcul direct et avec la loi de paroi d'ordre zéro ( $\mathbf{u} = 0$  à la paroi), la loi de paroi d'ordre 1 et la loi de paroi d'ordre 2. Les coupes sont faites à l'intérieur de la zone de recirculation. Les lois de paroi d'ordre élevées permettent de retrouver la bonne taille de la recirculation, en simulant correctement l'influence des rugosités sur l'écoulement. Une nette amélioration est apportée par le passage au deuxième ordre.

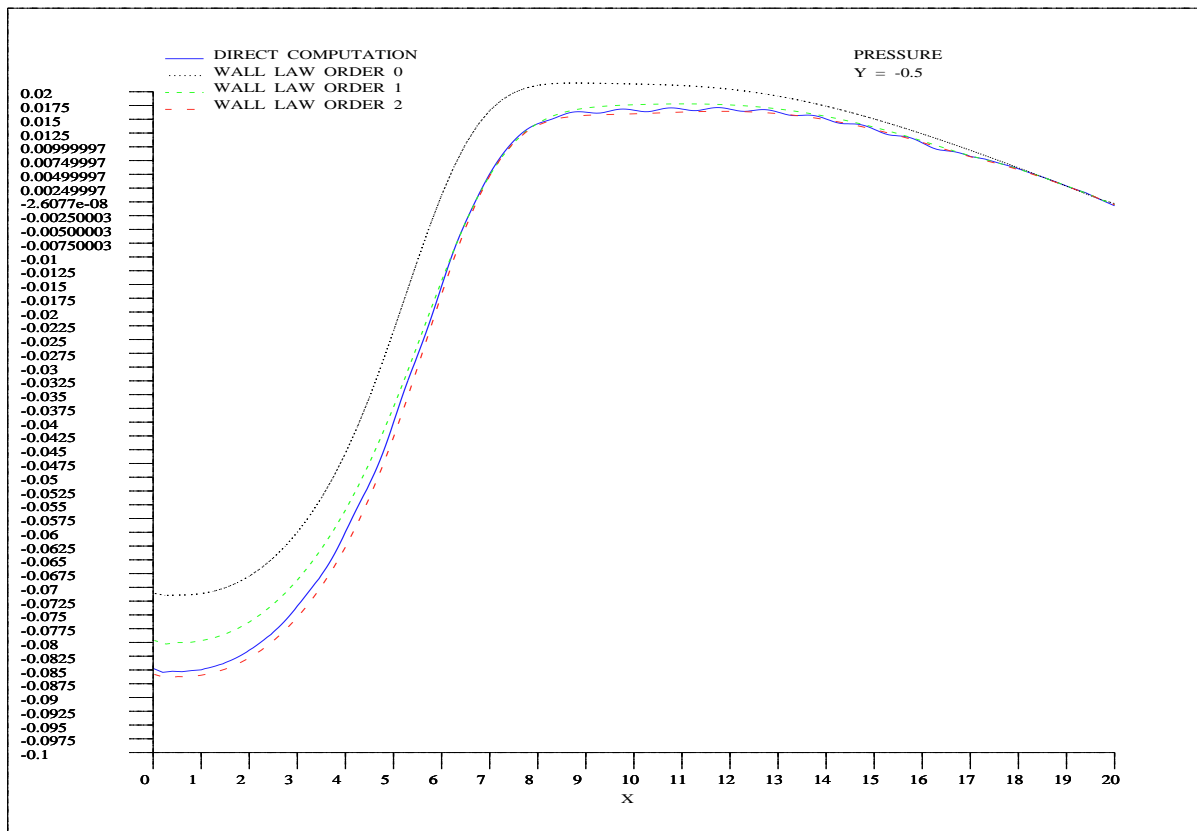
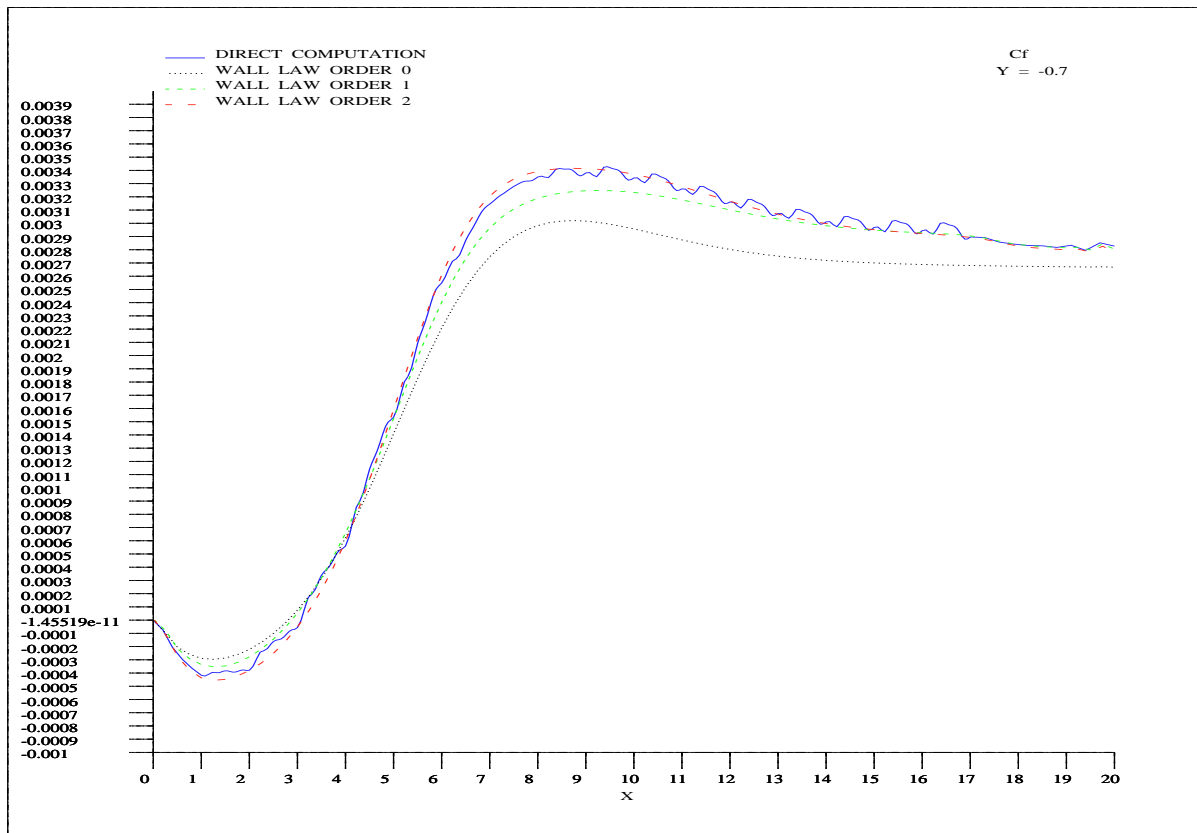


FIG. 21: Comparaison entre les profils de  $C_f$  (en haut) et de pression (en bas) obtenus par le calcul direct et avec la loi de paroi d'ordre zéro ( $\mathbf{u} = 0$  à la paroi), la loi de paroi d'ordre 1 et la loi de paroi d'ordre 2. On remarque l'amélioration apportée par l'utilisation des lois de paroi d'ordre élevé, en particulier la loi de paroi d'ordre 2.

## 6 Conclusion

On a présenté dans ce travail, une méthode d'éléments finis stabilisée adaptée à la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles satisfaisant aux conditions aux limites équivalentes d'ordre 1 et d'ordre 2. L'analyse d'erreur de la méthode a été effectuée pour le problème linéarisé pour la loi de paroi d'ordre 1, avec des estimations dans des normes dépendantes du maillage permettant un nouveau contrôle de la vitesse dans la semi-norme  $H^1$  du bord. Les résultats numériques ont validé la méthode, en montrant la nécessité de son utilisation et l'importance de la stabilisation sur le bord pour préserver de bonnes propriétés de stabilité et de consistance.

En raison de l'intérêt grandissant de l'utilisation des lois de paroi, soit en mécanique de fluides en utilisant des lois de paroi adaptées à des domaines rugueux et en turbulence en utilisant les lois logarithmiques, soit en électromagnétisme quand des conditions aux limites équivalentes absorbantes sont utilisées, cette nouvelle méthode stabilisée apparaît comme un outil pratique et fiable pour une approximation correcte des solutions. Par la suite, on s'intéressera à l'extension de la méthode stabilisée à des conditions aux limites équivalentes pour les équations de Navier-Stokes compressibles et pour les lois de paroi pour des écoulements turbulents basés sur les modèles du type  $k - \varepsilon$ . Une analyse d'erreur de la méthode stabilisée pour la loi de paroi d'ordre 2 est aussi en cours. Des interprétations des nouvelles formulations stabilisées par l'approche residual-free bubble ou par une méthode multiéchelles sont également envisagées.

## Références

- [1] Y. Achdou, O. Pironneau, and F. Valentin. Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries. *submitted to Journal of Computational Physics*.
- [2] Y. Achdou, O. Pironneau, and F. Valentin. Etude des lois de parois d'ordre 1 et 2 pour des domaines rugueux par décomposition de domaine. Technical Report 3326, INRIA, December 1997.
- [3] Y. Achdou, O. Pironneau, and F. Valentin. Construction des lois de paroi d'ordre 1 et 2 pour de domaines rugueux par analyse asymptotique. Technical Report 3357, INRIA, February 1998.
- [4] Y. Achdou, O. Pironneau, and F. Valentin. Nouvelle loi de paroi pour les équations de Navier-Stokes: Application aux écoulements à haut Reynolds. In *30<sup>ème</sup> Congrès National d'Analyse Numérique - CAnum'98*, Latitudes Camargue, Arles, 18-22 Mai 1998.
- [5] Y. Achdou, O. Pironneau, and F. Valentin. The wall laws for rough domains by asymptotic analysis. In *Fourth World Congress on Computational Mechanics*, Buenos Aires - Argentina, 29 June - 02 July 1998.

- [6] Y. Achdou, P. Le Tallec, F. Valentin, and O. Pironneau. Constructing wall laws with domain decomposition or asymptotic expansion techniques. *Comput. Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (151):215–232, 1998.
- [7] R. A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, 1975.
- [8] D. N. Arnold, F. Brezzi, and M. Fortin. A stable finite element for the Stokes problem. (23):337–344, 1984.
- [9] C. Baiocchi, F. Brezzi, and L. P. Franca. Virtual bubbles and the Galerkin-least-squares method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg*, (105):125–141, 1993.
- [10] Rodolph E. Bank and Bruno D. Welfert. A comparison between the mini-element and the Petrov-Galerkin formulations for the generalized Stokes problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.*, (83):61–68, 1990.
- [11] I. Basbuska. The finite element method with lagrangian multipliers. *Numer. Math.*, (20), 1973.
- [12] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrange multipliers. *RAIRO Ser. Rouge 8*, pages 129–151, 1974.
- [13] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid finite element methods*. Springer-Verlag, 1991.
- [14] F. Brezzi, L. P. Franca, T. J. R. Hughes, and A. Russo.  $b = \int g$ . *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 145(3-4):329–339, 1997.
- [15] F. Brezzi, L. P. Franca, T. J. R. Hughes, and A. Russo. Stabilization techniques and subgrid scales capturing. *preprint*, 1998.
- [16] F. Brezzi, L. P. Franca, and A. Russo. Further considerations on residual-free bubbles for advective-diffusive equations. *preprint*, 1998.
- [17] F. Brezzi, D. Marini, and A. Russo. Pseudo residual-free bubbles ans stabilized methods. In Jonh Wiley & Sons, editor, *Computational methods in Applied Scienses '96 - ECCOMAS 96*, Paris-France, 9-13 September 1996.
- [18] F. Brezzi and J. Pitkäranta. On the stabilization of finite element approximations of the Stokes equations. In *Efficient solutions of elliptic systems (Kiel, 1984)*, volume 10 of *Notes Numer. Fluid Mech.*, pages 11–19. Vieweg, Braunschweig, 1984.
- [19] Franco Brezzi, Marie Odile Bristeau, Leopoldo P. Franca, Michel Mallet, and Gilbert Rogé. A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 96(1):117–129, 1992.

- [20] Alexandre N. Brooks and T. J. R. Hughes. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.*, (32):199–259, 1982.
- [21] P. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, 1978.
- [22] P. Clément. Approximation by finite element functions using local regularization. *RAIRO Anal. Numér.*, (9):77–84, 1975.
- [23] R. Codina and O. Soto. A finite element implementation of the  $k - \varepsilon$  model and an algebraic stress model for turbulent steady incompressible flows. In Jonh Wiley & Sons, editor, *Computational methods in Applied Sciences '96 - ECCOMAS 96*, Paris-France, 9-13 September 1996.
- [24] J. Douglas and J. Wang. An absoluty stabilized finite element method for the Stokes problem. *Math. Comp.*, 52:495–508, 1989.
- [25] L. P. Franca. *New mixed finite element methods*. PhD thesis, Stanford University, 1987.
- [26] L. P. Franca, T. J. R. Hughes, and R. Stenberg. Stabilized finite element methods for the Stokes problem. In M. D. Gunzburger and R. Nicolaides, editors, *Incompressible Computational Fluid Dynamics-Trends and Advances*, pages 87–107. Cambridge University Press, 1993.
- [27] L. P. Franca and A. P. Macedo. A two-level finite element method and its application to the Helmholtz equation. *to appear*.
- [28] L. P. Franca, A. Nesliturk, and M. Stynes. On the stability of residual-free bubbles for convection-diffusion problems and their approximation bu a two-level element method. *preprint*, 1998.
- [29] L. P. Franca and A. Russo. Deriving upwinding, mass lumping and selective reduced integration by residual-free bubbles. *Appl. Math. Lett.*, 9(5):83–88, 1996.
- [30] Leopoldo P. Franca. An overview of the residual-free-bubbles method. In *Numerical methods in mechanics (Concepción, 1995)*, volume 371 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 83–92. Longman, Harlow, 1997.
- [31] Leopoldo P. Franca and Charbel Farhat. On the limitations of bubble functions. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 117(1-2):225–230, 1994.
- [32] Leopoldo P. Franca and Charbel Farhat. Bubble functions prompt unusual stabilized finite element methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 123(1-4):299–308, 1995.
- [33] Leopoldo P. Franca, Charbel Farhat, Antonini P. Macedo, and Michel Lesoinne. Residual-free bubbles for the Helmholtz equation. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 40(21):4003–4009, 1997.

- [34] Leopoldo P. Franca and Sérgio L. Frey. Stabilized finite element methods. II. The incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 99(2-3):209–233, 1992.
- [35] Leopoldo P. Franca, Sergio L. Frey, and Thomas J. R. Hughes. Stabilized finite element methods. I. Application to the advective-diffusive model. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 95(2):253–276, 1992.
- [36] Leopoldo P. Franca and Thomas J. R. Hughes. Convergence analyses of Galerkin least-squares methods for symmetric advective-diffusive forms of the Stokes and incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 105(2):285–298, 1993.
- [37] Leopoldo P. Franca and Alexandre L. Madureira. Element diameter free stability parameters for stabilized methods applied to fluids. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 105(3):395–403, 1993.
- [38] Leopoldo P. Franca and Alessandro Russo. Mass lumping emanating from residual-free bubbles. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 142(3-4):353–360, 1997.
- [39] Leopoldo P. Franca and Alessandro Russo. Unlocking with residual-free bubbles. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 142(3-4):361–364, 1997.
- [40] Leopoldo P. Franca and Rolf Stenberg. Error analysis of Galerkin least squares methods for the elasticity equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28(6):1680–1697, 1991.
- [41] Leopoldo Penna Franca and Eduardo Gomes Dutra do Carmo. The Galerkin gradient least-squares method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 74(1):41–54, 1989.
- [42] V. Girault and P. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*. Springer-Verlag, 1986.
- [43] Anne Greenbaum. *Iterative methods for solving linear systems*. SIAM, 1997.
- [44] P. M. Gresho. Incompressible fluid dynamics: Some fundamental formulation issues. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, (23):413–453, 1991.
- [45] P. Hansbo and A. Szepessy. A velocity-pressure streamline diffusion finite element method for incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Meth. Appl. Mech. Engrg.*, (84):175–192, 1990.
- [46] Isaac Harari and T. J. R. Hughes. What are c and h?: Inequalities for the analysis and design of finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.*, (97):157–192, 1992.
- [47] Isaac Harari and T. J. R. Hughes. Stabilized finite elements methods for steady advection-diffusion with production. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.*, (115):165–191, 1994.

- [48] T. J. R. Hughes. *The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall, 1987.
- [49] T. J. R. Hughes. Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.*, (127):387–401, 1995.
- [50] T. J. R. Hughes and K. Jansen. A stabilized finite element formulation for the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations. *Surveys on Mathematics for Industry*, (4):279–317, 1995.
- [51] Thomas J. R. Hughes and Leopoldo P. Franca. A new finite element formulation for computational fluid dynamics. VII. The Stokes problem with various well-posed boundary conditions: symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 65(1):85–96, 1987.
- [52] Thomas J. R. Hughes, Leopoldo P. Franca, and Marc Balestra. A new finite element formulation for computational fluid dynamics. V. Circumventing the Babuska Brezzi condition: a stable Petrov Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 59(1):85–99, 1986.
- [53] Thomas J. R. Hughes, Leopoldo P. Franca, and Gregory M. Hulbert. A new finite element formulation for computational fluid dynamics. VIII. The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 73(2):173–189, 1989.
- [54] S. Idelsohn, N. Nigro, M. Stort, and G. Boscaglia. A Petrov-Galerkin formulations for advection-reaction-diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.*, (136):27–46, 1996.
- [55] A. Madureira. On the development and analysis of stabilized finite element methods for fluids. Master's thesis, UFRJ-Brazil, 1992.
- [56] Carlos Parés. Un traitement faible en élément finis de la condition de glissement sur une paroi pour les équations de Navier-Stokes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, (t.307 série I):101–106, 1988.
- [57] R. Pierre. Simple  $C^0$  approximations for the computation of incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.*, (68):205–227, 1988.
- [58] O. Pironneau. *Finite element methods for fluids*. Wiley, 1989.
- [59] A. Russo. Residual-free bubble and stabilized methods. In M. M. Cecchi, K. Morgan, J. Periaux, B. A. Schrefler, and O. C. Zienkiewicz, editors, *Ninth International Conference in Finite Element in Fluids - New Trends and Applications*, pages 377–386, Venice - Italy, October 1995.

- [60] Alessandro Russo. Bubble stabilization of finite element methods for the linearized incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 132(3-4):335–343, 1996.
- [61] Y. Saad and H. Schultz. A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Stat. Comput.*, 7(3), 1986.
- [62] Farzin Shakib, Thomas J.R. Hughes, and Zdenek Johan. A multi-element group preconditioned GMRES algorithm for nosymmetric systems arising in finite element analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, (75):415–456, 1989.
- [63] R. Teman. *Navier-Stokes equations*. North Holland, 1979.
- [64] R. Teman. *Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis*. Society-for industrial and applied mathematics, 1995.
- [65] T. E. Tezduyar, R. Shih, S. Mittal, and S. E. Ray. Incompressible flow using stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements. Technical Report UMSI 90/165, University of Minnesota, 1990.
- [66] L. Tobiska and R. Verfurth. Analysis of a streamline diffusion finite element method for the Stokes and Navier-Stokes equations. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 33(1):107–127, February 1996.
- [67] F. Valentin. Méthode d’élément finis stabilisée pour les équations de Navier-Stokes incompressibles avec des conditions aux limites équivalentes. Technical report, INRIA, to appear.
- [68] F. Valentin and L. P. Franca. Combining stabilized finite element methods. *Computational and Applied Mathematics*, 14(3):285–300, June 1995.
- [69] Frédéric Valentin. Método estabilizado combinado para um modelo de turbulência. Master’s thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, Rio de Janeiro - Brasil, July 1994.
- [70] Rudiger Verfurth. Finite element approximaion of incompressible Navier-Stokes equations with slip boundary conditions. *Numerich Matematik*, (50):697–721, 1987.
- [71] Rudiger Verfurth. Finite element approximaion of incompressible Navier-Stokes equations with slip boundary conditions II. *Numerich Matematik*, (59), 1991.





---

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

Éditeur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399